

0366-1121

מכתב גאון פ' 1

מכתב: פה. נ"כ ס'כ

מועד, ס'טכ

2.2.210

מכתב הקדמה ב שאלה
סוף להשגה בחומר עזר. נ"הן להיחזק
במחשבה נ"ס.

מכתב ס' : יש לעמוד זה סוף משה השאלה
מחלק נב.

ל. הו' כ' ח' / ס' הפכ' כ' /

ס' (15 נ"ה) פותח ליה שאלה חסונה. ב צבא
ס' נ"ה ס' טכדי'.

ה. ס' (נ"ה) פותח ליה חסונה ב צבא ה' ס'
ס' טכדי'.

WW-23

2. הוכיח/י את הפניכ/י

א. (15 נק') פונקציה טאנרגה אפוארה Σa_n
טאנרגה געזינה געקטע הסטאנ Σa_n .

ב. (10 נק') גב' $f(x)$ געזינה פערמייט Σa_n
אומיון $\neq f''(x)$ אדור כס $x \in \Sigma a_n$
טאנ' כס עינק טע f א-קעגל עכס ה'א-ר
פערמייט געקטע Σa_n .

חלק ב': ערה/עני' עס 3 מילך 4 האטעל
גחלק 5ה.

3. (25 נק') אקכ/י את הפונקציה
 $f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln|x|$

עפי הסעיפים הבאים: גחומ' העזנה וק'פיל,

גחומ' עזיה יורינה, עקונג-קילזון, גחומ' קליינה
עמסלה ועמלה, עקונג-פ'גום ואיסטרפאלט.

עניטל/י גכס טע $y = f(x)$

4. 1c. (15 נק') ה' $f(x)$ נגזרת ב' כר טרנסק"מ

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \ln(x^x) = -1$$

1/20 נק'
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x^2} \int_0^{x^2} t^{f(t)} \sin t \, dt$$

2. (10 נק') 1/20 נק'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

5. 5' ו' סדור

1c. אם $f(x)$ נגזרת ב' $[a, b]$ ו' $f(x) \in [a, b] \rightarrow$ (15 נק')

1c' ק"מ \rightarrow נק' $c \in [a, b]$ כר ו

$$c - a + f(c) - b = 0$$

2. (10 נק') סדור

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 6 = 0$$

ו' 3' \rightarrow כר 3' 1c.

1/25/11 (7/15).10 .6

$$\checkmark \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^1 x e^{\beta(x-1)} dx$$

1/25/11 (7/10).2

$$\checkmark \int_1^2 \frac{2}{x^2} \ln(x+2) dx$$

! 2 1 8 7 2 2

מחברת מס' _____
מחברות _____

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המסגרות ולנהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק סלפונים ניידים או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחוק מסקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.

5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמסגרת.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה כטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמסגרת. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המסגרת.

7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יחזיק רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למסגרת את המחברת ואת השאלון, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב כלי לכתוב את הבחינה יחשב כמי שנבחן כמועד זה וציונו יהיה "ס".

8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.

9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיפוסה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.

10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המסגרת את התעודה המזהה.

11. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.



תאריך הבחינה 2/2/10

שם הקורס תשמיך אנפניאטורי 1

שם המורה פרופ' ניר סובל

לשימוש המורה הבוחן:

הציון _____
המחברת נבדקה ביום _____
חתימת המורה _____

3019664

$$\begin{array}{r}
 25(2 \\
 16 = 6 + 10 \quad 25(3 \\
 \quad 24 \quad \quad \quad 6 \\
 \quad - \quad \quad \quad 5 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 90
 \end{array}$$

①

הנחיות

④ זהו זה

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x^2} \cdot \int_0^{x^2} f(t) \sin t \, dt \stackrel{\text{למה?}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) \sin t \, dt}{\tan x^2} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x^2} f(t) \sin t \, dt = 0$$

אולי פשוט...
אולי פשוט...
אולי פשוט...

אולי פשוט...
אולי פשוט...
אולי פשוט...

~~אולי פשוט...~~

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{\cos^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x^2 \cdot x \cdot \sin x$$

אולי פשוט...
אולי פשוט...
אולי פשוט...

אולי פשוט...
אולי פשוט...
אולי פשוט...

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln x^x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^{\ln x^x \sin x}}$$

אולי פשוט...
אולי פשוט...
אולי פשוט...

אולי פשוט...

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{\ln x^x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{x \ln x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x \sin x \cdot \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x^2 \ln^2 x$$

אולי פשוט...
אולי פשוט...
אולי פשוט...

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^3}{3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3} = 0$$

אולי פשוט...
אולי פשוט...
אולי פשוט...

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x^2} \int_0^{x^2} f(t) \sin t \, dt = 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

אולי פשוט...
אולי פשוט...
אולי פשוט...

אולי פשוט...

הנחיות

הנחיות

הנחיות

הנחיות

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}{n}$$

ב (2)

הנני מנסה

הנני מנסה להשתמש בלמה של לופיטל

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

אם ניקח את המעריך, זה יהיה $\frac{1}{n+1}$, וזה יתקדם ל-0.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \ln \frac{1}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n+1}}{n+1}}$$

ננסה להשתמש בלמה של לופיטל, $n \rightarrow \infty$, $\ln \frac{1}{n+1} \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n+1} - \ln \frac{1}{n}}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

אם ניקח את המעריך, זה יהיה $\frac{n}{n+1}$, וזה יתקדם ל-1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n}{n+1} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \ln \left(\frac{1}{1+0}\right) = \ln 1 = 0$$

$$e^{\ln 1} = 1$$

התשובה היא 1.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 1}$$



הנני מנסה להשתמש בלמה של לופיטל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

הנני מנסה להשתמש בלמה של לופיטל

2

5. הוכחה

(k) $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$.

~~נניח כי $f(a) < a$ ונבחר $\epsilon = a - f(a) > 0$. לפי רציפות f ב- a , קיים $\delta > 0$ כזה ש- $f(x) > a$ לכל $x \in [a, a + \delta]$. נבחר $x_0 \in [a, a + \delta]$ ונכתוב $f(x_0) = b$. נגדיר $g(x) = x - a + f(x) - b$. נראה כי g רציפה בקטע $[a, b]$ ונראה כי g חסומה בקטע $[a, b]$. נגדיר $h = b$, $y = a$. נראה כי $f(x) \leq b$ ו- $f(x) \geq a$ לכל $x \in [a, b]$. נגדיר $g(x) = x - a + f(x) - b$. נראה כי $g(a) = (a - a) + f(a) - b = 0 + f(a) - b < 0$ ו- $g(b) = (b - a) + f(b) - b = f(b) - a > 0$. לפי רציפות g בקטע $[a, b]$, קיים $c \in (a, b)$ כזה ש- $g(c) = 0$. נגדיר $f(c) = a$. נראה כי $f(c) = a$ ו- $f(c) \geq a$ ו- $f(c) \leq b$. נגדיר $g(c) = 0$. נגדיר $g(c) = c - a + f(c) - b = 0$. נגדיר $f(c) = a$. נגדיר $f(c) = a$.~~

$$g(x) = x - a + f(x) - b$$

$g(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ ונראה כי g חסומה בקטע $[a, b]$.

($h = b, y = a$)

$f(x) \leq b$ ו- $f(x) \geq a$ לכל $x \in [a, b]$.

$f(x) \geq a$ ו- $f(x) \leq b$ לכל $x \in [a, b]$.

נראה כי $g(a) = (a - a) + f(a) - b = 0 + f(a) - b < 0$ ו- $g(b) = (b - a) + f(b) - b = f(b) - a > 0$.

לפי רציפות g בקטע $[a, b]$, קיים $c \in (a, b)$ כזה ש- $g(c) = 0$.

$$g(a) = (a - a) + f(a) - b = 0 + f(a) - b < 0$$

$$g(b) = (b - a) + f(b) - b = f(b) - a > 0$$

$$g(c) = 0$$

$$f(c) = a$$

$$g(b) = b - a + f(b) - b = f(b) - a > 0$$

נראה כי $f(c) = a$ ו- $f(c) \geq a$ ו- $f(c) \leq b$.

$$g(a) < 0 < g(b)$$

לפי רציפות g בקטע $[a, b]$, קיים $c \in (a, b)$ כזה ש- $g(c) = 0$.

$$g(c) = 0$$

$$g(c) = c - a + f(c) - b = 0$$

$$f(c) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6 = 0$$

נראה כי $f(0) = -6 < 0$ ו- $f(4) = 1024 > 0$.

$$f(0) = -6 < 0$$

$$f(4) = 1024 > 0$$

לפי רציפות f בקטע $[0, 4]$, קיים $c \in (0, 4)$ כזה ש- $f(c) = 0$.

נראה כי $f(c) = 0$ ו- $f(c) \geq 0$ ו- $f(c) \leq 4$.



② נתון: f פונקציה, $f'' \neq 0$ ב $x \in [a, b]$.
 צ' (רשמי): \exists בנקודה f מקבלת ערך קיצוני.
 (הוכחה)

נניח שהפונקציה f מקבלת את המינימום ב a ו 3 נקודות. קיימים x_1, x_2, x_3 כך ש:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = a$$

f פונקציה בקטע סגור, ומכאן היא רציפה בו. מכאן, לפי משפט רוש (Rolle) קיימים: $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = a$ והפונקציה רציפה ב $[x_1, x_2]$ - (בין נקודה נקודה רציפה ב f קיימת נקודה c_1 ש $f'(c_1) = 0$).

$f(x_2) = f(x_3) = a$ והפונקציה רציפה ב $[x_2, x_3]$ - (בין נקודה נקודה רציפה ב f קיימת נקודה c_2 כך ש $f'(c_2) = 0$).

ומכאן נקודת הקיצון c_1 ו c_2 ש $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

f פונקציה פנימית, ולכן סגורה. f' פונקציה וחסר נקודה ש f' רציפה בקטע $[a, b]$ (משפט של פונקציה פנימית). מכאן, לפי משפט רוש (Rolle) קיימים נקודות d עבור f' .

~~הוכחה~~ $[c_1, c_2] \subset [a, b]$ ומכאן f' רציפה ב $[c_1, c_2]$ ומכאן $f'(d) = 0$ ב $d \in [c_1, c_2]$.
 ב $[c_1, c_2]$ ומכאן f' רציפה ב $[c_1, c_2]$ ומכאן $f'(d) = 0$ ב $d \in [c_1, c_2]$.
 מכאן $f''(x) \neq 0$ ב $x \in (a, b)$ $\leftarrow d \in [c_1, c_2] \subset [a, b]$ $\leftarrow d \in [a, b]$.
 f מקבלת בנקודה f מקבלת ערך קיצוני. נ.ש.ל.

✓ 10/10

6

שאלה 3

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln|x|$$

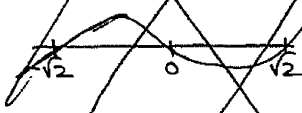
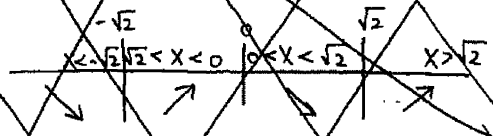
$$x^2 \neq 0$$

$$|x| \neq 0 \rightarrow x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

2) נבדוק: הפונ' רציפה בכל נקודה בעל סגור של אומקטורל רציפה, נקבע ב $x \neq 0$,
שם יש אי רציפה מסוג שני. משום שהפונקציה החד צדדית סגורה לאינסוף, (הפונ'
זו כל לא מוגדרת שם).

3) נחזונו עזרה וירידה: פסור או הפונ' לא לעולם נחזונו עזרה וירידה:

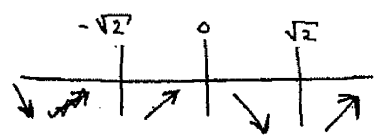
~~$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x} \cdot \text{sgn}(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{1}{|x|}$$~~
~~$$-2x^3 + x^3 = -x^3$$~~
~~$$x(x^2 - 2) = 0$$~~
~~$$x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$~~
~~$$-\sqrt{2} < x < 0 \text{ or } 0 < x < \sqrt{2}$$~~
~~~~
~~~~

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{-2+x^2}{x^3}$$

נבדוק נחזונו עזרה וירידה: חקירה חזקה ופזילה - הנמצאה:

$$\frac{-2+x^2}{x^3} > 0$$

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^3}$$



סוגרי: $x > \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < x < 0$ - תחום עליה

$x < -\sqrt{2}$, $0 < x < \sqrt{2}$ - תחום ירידה

הנקודות קיצון: נמצא נקודות: $x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ - נמצא נקודות

כל מסמן נמצא חסונה, ב $x = -\sqrt{2}$ הנמצא חסונה סמן חסונה כל זה

מינמום. ב $x = \sqrt{2}$ הנמצא חסונה סמן חסונה חסונה כל זה

מינמום:

$$\min = (\sqrt{2}, 0.846), (-\sqrt{2}, 0.846)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \ln|x| + 1}{3x} \stackrel{\substack{=\infty \\ \text{פיר } (G) \text{ ו } (f)} \downarrow}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3x} = \boxed{0=a}$$

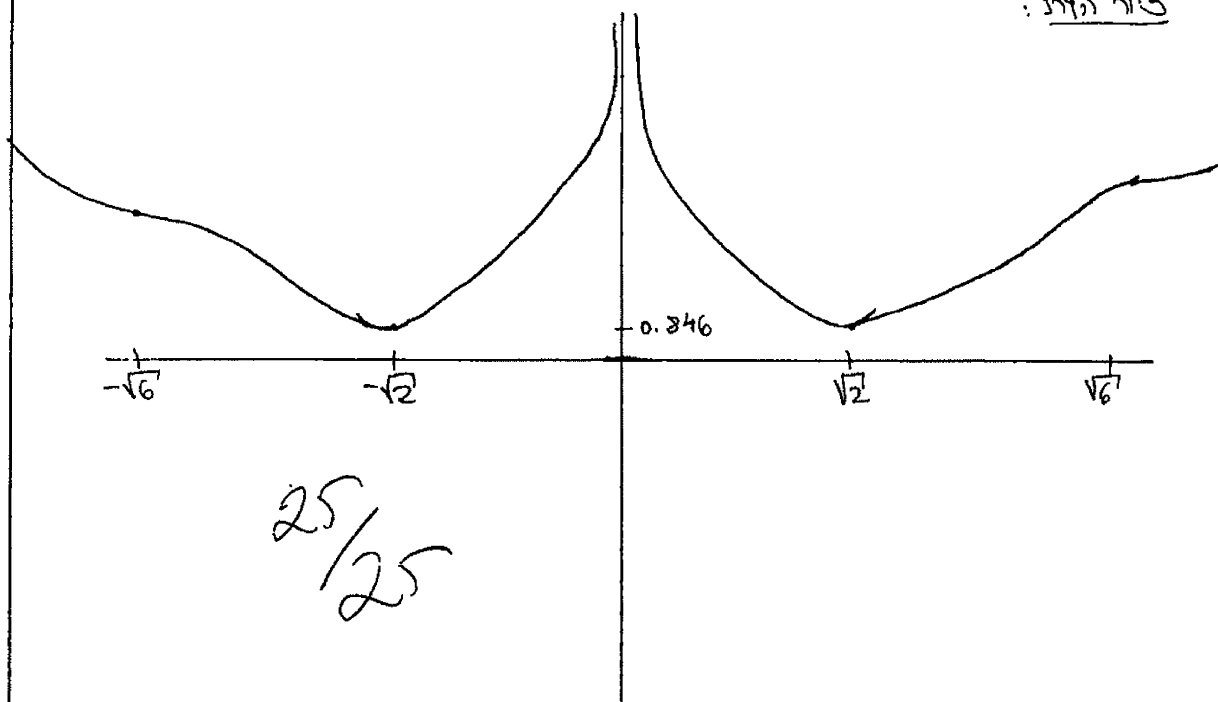
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \ln|x| \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + x^2 \ln|x|}{x^2} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\infty}{\infty}$$

(G) ו (f) א (f)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x \ln|x| + \frac{x^2}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \ln|x| + 1}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln|x| + \frac{1}{2} = \infty = b$$

מחלקים שנין עבור אינטגרל

צור הקשר:



25/25

חלק עם הקריס: המתינס חלק, והפול' לא מוגדר ב $x=0$, ואכן שאנו חוגגים
אל הקריס.