14
~~22~~/2/2009 מועד ב' סמסטר א' תשס"ט מרצה: ש. ארטשטיין

מבחן במבוא לתורת הקבוצות

משך המבחן: שלוש שעות. השימוש בכל חומר עזר אסור, כולל למחשבון.

יש לענות על בדיוק **ארבע** שאלות.

נא לסמן, בעמוד הראשון במחברת הבחינה, אילו שאלות בחרתם.

עליכם לצטט, במדויק, כל משפט מהשיעור בו הנכם משתמשים.

שימו לב: בכל סעיף, תשובה לא נכונה תזכה אתכם ב-0 נקודות. תשובה ריקה תזכה אתכם ב- 20% משווי הסעיף.

אנא רשמו תשובות מלאות ומדויקות.

שאלה 1: (25 נקודות)

הוכח/הוכיחי את משפט הסכום: לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a+a=a$.

שאלה 2: (25 נקודות)

נתונה קבוצה X עליה מוגדר יחס סדר מלא $\leq$.
כמוכן נתון שכל תת-קבוצה בת-מניה של X (עם יחס הסדר המושרה) היא סדורה היטב. יש להראות שגם $(X,\leq)$ סדורה היטב.

AAAC-26

שאלה 3: (25 נקודות)

(א) נתונות שתי קבוצות לא ריקות X,Y ונתונה $f:X\to Y$. יש להראות שתנאי מספיק והכרחי לכך שלכל $A,B\subseteq X$ מתקיים $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ הוא ש f היא חד-חד-ערכית.

(ב) יהיו R,S יחסי שקילות על קבוצה לא ריקה X. ציינו אילו מבין הקבוצות הבאות תמיד מגדירות יחס שקילות, אילו מהן לעולם לא מגדירות יחס שקילות, ועבור אילו קבוצות זה תלוי ביחסים R,S.

1. $R\cup S$.
2. $R\setminus S$.
3. $R\cap S$.
4. $R\triangle S$.

שאלה 4: (25 נקודות)

(א) נתונה קבוצה סדורה חלקית ולא ריקה $(A,\leq)$. תת קבוצה $B\subseteq A$ נקראת **חסרת-סדר** אם לכל $a,b\in B$ כך ש $a\leq b$ מתקיים $a=b$. הוכיחו שקיימת תת קבוצה $B\subseteq A$ חסרת-סדר ומקסימאלית ביחס להכלה.

(ב) נביט ב $A=P(\mathbb{N})$ סדורה חלקית ביחס להכלה. הגדירו מהי שרשרת. האם קיימת שרשרת ב- $A=P(\mathbb{N})$ (ללא חזרות) שאינה בת מנייה ?

שאלה 5: (25 נקודות)

(א) נתונה קבוצה סדורה היטב ולא ריקה $(X,<)$, ופונקציה $f:X\to X$ עולה ממש (ביחס ליחס הסדר על X). הראו כי לכל $x\in X$ מתקיים $f(x)\geq x$.

(ב) פונקציה ממשית שמקיימת $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ נקראת מכווצת. מה עוצמת כל הפונקציות המכווצות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$?