

## מבחן במבוא לתורת הקבוצות

# AAAC-35

סמסטר ב' התש"ע, מועד א'

תאריך: 4.7.2010

מרצה: פרופ' אלי גלזר

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר.

ענו על שתי השאלות הבאות בפירוט מלא:

1. (א) תהא  $X$  קבוצה ותהא  $\phi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  פונקציה שומרת הכלה (כלומר אם  $A$  ו  $B$  תת-קבוצות של  $X$  אז  $A \subset B \Rightarrow \phi(A) \subset \phi(B)$ ). הראו שקיימת קבוצה  $Y \subset X$  כך ש  $\phi(Y) = Y$ .

(ב) נסחו את משפט קנטור-ברנשטיין והוכיחו אותו ע"י שימוש בסעיף הקודם.

2. הגדירו מהו מספר אלגברי וחשבו את עוצמת קבוצת המספרים האלגבריים.

ענו על שלוש מארבע השאלות הבאות. הסבירו תשובותיכם.

3. תהא  $A$  קבוצה אינסופית ותהא  $B$  קבוצה אינסופית בת מניה. השתמשו בכך שאיחוד קבוצות בנות מניה הוא בן מניה וחראו כי  $A \cup B \sim A$ .

4. יהיו  $\omega$  האורדינל האינסופי הראשון,  $\omega_1$  האורדינל האינסופי הראשון שאינו בן מניה ו  $\Omega = 2^{\aleph_0}$  קרדינל הרצף (חישבו עליו כעל אורדינל פותח). קבעו את הסדר והשיויון בין האורדינלים הבאים:

$$\Omega^{\omega_1}, 3^{\Omega}, \Omega, \omega_1, \Omega \cdot 3, \omega \cdot \omega_1$$

5. הראו שקיימת משפחה  $\mathcal{A}$  שאבריה תתי-קבוצות אינסופיות של  $\mathbb{N}$ , עוצמתה  $2^{\aleph_0}$  ובנוסף לכל שתי קבוצות שונות  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  מתקיים ש  $A_1 \cap A_2$  סופי.

6. הסבירו כיצד ניתן לקבל את אקסיומת הבחירה כתוצאה של עקרון המקסימום של האוסדורף. נסחו במדויק את שתי הטענות.

בהצלחה!