3)3

אוניברסיטת תל אביב
פקולטה למדעים מדויקים

מס' הקורס 0366-1120-01 | סמסטר ב' מועד ב'
המרצה: פרופ' א. שצ'רבק | תאריך: 19.08.2009

בחינה בקורס "מבוא לאלגברה 2 לדו-חוגי"

משך הבחינה 3 שעות. עליכם לבחור ולענות על **4 מתוך 6 השאלות.**
ערך כל השאלה הינו 25 נקודות.
תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה אתכם במלוא הנקודות.
אין להשתמש בחומר עזר, כולל מחשבון.

ב ה צ ל ח ה !!

שאלה 1. *(א)[13 נ']* במרחב וקטורי V, $\dim V \geq 2$, נתונים העתקה ליניארית $T:V\to V$ המקיימת $\dim \operatorname{Im} T = 1$, ותת מרחב T-אינווריאנטי $U \subseteq V$, $\dim U = 1$.
הוכיחו: אם $U \neq \operatorname{Im} T$, אז $U \subseteq KerT$.

(ב) [12 נ'] במרחב וקטורי V מעל ממשיים נתונה טראנספורמאציה ליניארית $T:V\to V$ שונה מהעתקת האפס ומקיימת $T^{2010}+T^{2008}=T^{2009}$. הסברו האם T ניתנת ללכסון? [אין קשר בין הסעיפים!!]

שאלה 2. יהיה $(V, (\cdot,\cdot))$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, והעתקה ליניארית $T:V\to V$ מקיימת $T^2=\frac{T+T^*}{2}$, כאשר T^* העתקה צמודה.
(א) [7 נ'] הסבירו האם T נורמאלית?
(ב) [10 נ'] בדקו כי אם λ הוא ערך עצמי של T, אז $\lambda^2=\lambda$.
(ג) [8 נ'] בדקו כי לכל k טבעי $T^k=T$.

שאלה 3 *(א) [10נ']* הוכיחו: אם מטריצה $M\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ ניתנת ללסכון, אז לכל פולינום ממשי $f(x)$ המטריצה $f(M)$ גם כן ניתנת ללכסון.

(ב) [15 נ'] במרחב אוקלידי $\mathbb{R}^4$ נתונה העתקה

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\y-z+w\\w\\x+2y-w\end{pmatrix}.$$

מצאו את המרחק מנקודה $A(1,0,0,0)$ ל-$KerT$. [אין קשר בין הסעיפים!!]

AAAS-22

שאלה 4. *(א) [15 נ']* נסמן $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$ בלוק ז'ורדן מגודל $n\times n$ עם 1 אל האלכסון. הוכיחו כי צורת ז'ורדן של מטריצה A^3 היא A.

(ב) [10 נ'] למטריצות $A,B\in Mat_{5\times5}(\mathbb{R})$ יש אותו פולינום מינימאלי $m_A(x)\equiv m_B(x)\equiv(x-3)^2$. האם ל-$A,B$ בהכרח בעלות אותה צורת ז'ורדן? נמקו.
[אין קשר בין הסעיפים!!]

שאלה 5. נסתכל במרחב $\mathbb{C}^n$, $2\le n$, עם מכפלה הרמיטית סטנדרטית.
(א) [10 נ'] נתון כי העתקה ליניארית $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ מקיימת $T^k=O$, כאשר O העתקת האפס ו-k מספר טבעי, $2\le k\le n$. הוכיחו: T נורמאלית אם ורק אם $T=O$.

(ב) [15 נ'] נתון כי $S:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ איזומטריה ו-$(S+iId)$ העתקה צמודה לעצמה, כאשר Id העתקת הזהות. הוכיחו: $S=-iId$ [רמז: חשבו $(S+iId)^2$].

שאלה 6. *(א) [10 נ']* יהיו $(V,\ (\cdot,\cdot))$ מרחב מכפלה פנימית, $T\in L(V)$ העתקה ליניארית הפיכה. האם העתקה צמודה $T^*\in L(V)$ הפיכה? נמקו.

(ב) [15 נ'] תהי $M\in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונאלית, $\det M=1$. הוכיחו כי $tr(M^2)=(trM)^2-2trM$.
[אין קשר בין הסעיפים!!]

בהצלחה!!