0366-1105

מבוא לתורת הקבוצות , 2011
מבחן מסכם, סמסטר א', מועד א'
13/02/11
מרצה: אלי גלזנר

- משך הבחינה – 3 שעות.
- אין להשתמש בחומרי עזר.

חלק I (40%): ענו על **אחת** מתוך שתי השאלות הבאות עם פירוט מלא.

1. הוכיחו:

א.(ישירות) לכל שלושה סודרים α,β,γ מתקיים: $\beta<\gamma \Rightarrow \alpha+\beta<\alpha+\gamma$.

ב.(אינדוקציה טרנספיניטית) לכל שני סודרים $\alpha,\beta>1$ מתקיים $\alpha^\beta \geq \beta$ (ניתן להשתמש בטענה הבאה מבלי להוכיח אותה: לכל שלושה סודרים κ,λ,μ מתקיים: $\lambda<\mu \Rightarrow \kappa\cdot\lambda<\kappa\cdot\mu$). תנו דוגמא לסודרים אינסופיים α,β עבורם מתקיים $\alpha^\beta=\beta$.

2. נסחו והוכיחו את משפט קנטור-ברנשטיין.

חלק II: ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות (20% כל אחת). הסבירו את תשובותיכם.

3. נסמן ב- ω,ω_1,ω_2 את שלושת הסודרים האינסופיים הפותחים הראשונים (כלומר שלושת הסודרים המונים האינסופיים הראשונים). סדרו את הסודרים הבאים ע"פ גודלם (ציינו גם שויונים):

$$2\cdot\omega_1+\omega\cdot 3+3,\ \ \omega\cdot 3+\omega_1+3,\ \ \omega_1^{\omega_2}+\omega_2+\omega_1,\ \ \omega_1\cdot\omega_2$$

4. הוכיחו ישירות (הראו פונקציה חח"ע ועל מפורשת) או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

ב. יהי M אוסף כל המספרים הממשיים שהם שורשים של משוואות מהצורה $ax^2+bx+c=0$, כאשר a,b,c שלמים. יהי $K=\{s\cdot m+t : s,t\in\mathbb{Q}, m\in M\}$. אזי $K\sim\mathbb{R}$.

5. הסבירו איך ניתן להסיק את אקסיומת הבחירה מתוך עקרון המקסימאליות של האוסדורף. (נסחו במדויק את שניהם)

6.א. הסבירו כיצד ניתן להתייחס ל- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כתת-קבוצה של $P(\mathbb{R})$.

ב. הוכיחו בעזרת משפט קנטור-ברנשטיין ש- $|P(\mathbb{R})|=|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$.

ג. האם לכל קבוצה $X\neq\phi$ אינסופית מתקיים $|P(X)|=|X^X|$? אם אתם משתמשים באקסיומת הבחירה הסבירו במדויק כיצד.

בהצלחה

AAAC-36

1030 - 1033

14

מחברת מס' _____
מתוך _____ מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

תאריך הבחינה 13.2.2011

שם הקורס מבוא לתורת הקבוצות

שם המורה פרופסור אלי אלבר

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)
[redacted]

[redacted]

14

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 100
המחברת נבדקה ביום _____
חתימת המורה _____

3012482

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להכין בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **סלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחוק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או במסוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר,יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב כלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

40	2
20	5
20	4
20	6
100	مثل

עניתי על שאלות 2, 4, 5, 6.

חלק I

שאלה 2

נאמר נניח את לאמר נקודת השבת: תהי X קבוצה ופו'
$F: P(X) \to P(X)$ פו' מונוטונית עולה כלומר לכל $A,B \subseteq X$
כך ש- $A \subseteq B$ $F(A) \subseteq F(B)$ יהי קיימת $Z \subseteq X$ כך
ש- $F(Z) = Z$.

הוכחה: נגדיר $a = \{A \subseteq X \mid A \subseteq F(A)\}$ וכן
$Y = \bigcup_{A \in a} A$. לכל $A \in a$ מתקיים $A \subset F(A)$ לכן

(1) $Y = \bigcup_{A \in a} A \subseteq \bigcup_{A \in a} F(A)$. כמו כן $A \subseteq \bigcup_{A \in a} A = Y$ לכל
$A \in a$ ולכן כיוון שהפו' מונוטונית עולה מתקיים $F(A) \subseteq F(Y)$
לכל $A \in a$ ומכאן $\bigcup_{A \in a} F(A) \subseteq F(Y)$ (2) סה"כ קיבלנו מ-
(1) + (2): $Y \subseteq F(Y)$ נפעיל את F על שני אגפי
האי שוויון ונקבל $F(Y) \subseteq F(F(Y))$ ולכן $F(Y) \in a$ ומכאן
$Y = \bigcup_{A \in a} A \subseteq F(Y) \Leftarrow F(Y) = Y$ כנדרש. ✓

מבחן קנטור ברנשטיין: יהיו שתי קבוצות X, Y
כך ש- $|Y| \le |X|$ ו- $|X| \le |Y|$. אזי $|Y| = |X|$.

הוכחה: מהנתון נובע כי ישנה פו' חח"ע $f: X \to Y$ וכן
פו' חח"ע $g: Y \to X$. נגדיר $F(X): P(X) \to P(X)$
באופן: לכל $A \subseteq X$ $F(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$
נבדוק כי F פו' מונוטונית עולה ולכן מתקיימת אי לאמת
נקודת השבת:
יהיו $A, B \subseteq X$ כך ש- $A \subseteq B$ אזי:

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow Y \setminus f(A) \supseteq Y \setminus f(B) \Rightarrow g(Y \setminus f(A)) \supseteq g(Y \setminus f(B))$$
$$\Rightarrow X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subseteq X \setminus g(Y \setminus f(B))$$

$\Rightarrow \quad F(A) \subseteq F(B)$

לכן לפי לפחות נקודה הוכחה קיימת $Z \subseteq X$ כך
ש- $Z = F(Z) \in$ $\quad Z = f(Y \setminus g(X \setminus Z))$ ניקח
הפרש משני אגפי המשוואה ונקבל:

$$Z \setminus X = f(Y \setminus g(Z)) \quad . \quad (*)$$

לכן קיבלנו כי $X \setminus Z$ ~~הוא~~ בתמונה של $g(X)$
וכיוון ש- $g(X)$ חח"ע ויש פו' הפוכה ש"ת מ"ל
אל $X \setminus Z$ ומשם נקבל:

$Y \setminus f(Z) = g^{-1}(X \setminus Z)$ נגדיר פו' $h: X \to Y$
באופן הבא לכל $x \in X$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in Z \\ g^{-1}(x) & x \in X \setminus Z \end{cases}$$

נשים לב כי $h(x)$ מוגדרת היטב כיוון ש- $f(x)$ מוגדרת
ב- X והפונ' ב- $X \supseteq Z$ ו- $g^{-1}(x)$ מוגדרת ב- $X \setminus Z$
מה"ז הקבוצות. נראה כי h חח"ע ועל.

<u>חח"ע</u>: יהיו $x_1 \neq x_2 \in X$ אזי:

א אם $x_1, x_2 \in Z$ אזי $h(x_1) = f(x_1)$ ו $h(x_2) = f(x_2)$ וכיוון
ש- f חח"ע מתקיים $f(x_1) \neq f(x_2)$ ו $\Leftarrow$ $h(x_1) \neq h(x_2)$.

ב אם $x_1, x_2 \in X \setminus Z$ אזי $h(x_1) = g^{-1}(x_1)$, $h(x_2) = g^{-1}(x_2)$
וכיוון ש- g חח"ע גם ההופכית שלה חח"ע. ולכן $g^{-1}(x_1) \neq g^{-1}(x_2)$
ולכן $h(x_1) \neq h(x_2)$.

ג אם בה"כ $x_1 \in Z$ ו- $x_2 \in X \setminus Z$ אזי $h(x_1) = f(x_1) \in f(Z)$
ו- $h(x_2) = g^{-1}(x_2) \in X \setminus Z$ ומתקיים $f(Z) \cap (Y \setminus f(Z)) = \emptyset$ ולכן
$h(x_1) \neq h(x_2)$ והפונ' קיבלנו שבאמת מתקיים h חח"ע.

<u>על</u>: יהי $y \in Y$. אם $y \in f(Z)$ אזי y בתמונה של f
ולכן קיים $x \in X$ כנ"ל והפונ $x \in Z$ כך ש- $f(x) = y$.
$\Leftarrow$ $h(x) = y$.

אם $y \in Y \setminus f(Z)$ אזי לפי (*) קיים $x \in X \setminus Z$ כך ש- $g^{-1}(x) = y$ ולכן $h(x) = y$.

לסיכום, קיבלנו $h: X \to Y$ חח"ע ועל ולכן $|Y| = |X|$.

<u>חלק II</u>

<u>שאלה 5</u>

<u>אקסיומת ההחלפה:</u> לכל אוסף של קבוצות F לא יקיים ובכולם הבדיל קיים $S \subseteq \bigcup F$ כך שלכל $A \in F$ $|A \cap S| = 1$.

<u>לעקרון המקסימליות של האוסדורף:</u> יהי F אוסף בר מלקיות של קב' Y. אם לכל שרשרת $S \subseteq F$ מתקיים $\bigcup S \in F$ אזי ב- F יש איבר מקסימלי ביחס להכלה.

נראה כי ניתן להסיק את אקסיומת ההחלפה מעקרון המקסימליות של האוסדורף! תהי F אוסף קבוצות לא ריקות ובכולן הבדיל נגדיר קב' $X = \bigcup F$:

$$\mathcal{S} = \{ S \subseteq X \mid \text{card}(S \cap A) \le 1 \quad \text{לכל } A \in F \}$$

נראה כי ב- $\mathcal{S}$ יש איבר מקסימלי. תהי $S = \{S_t\}_{t \in T}$ שרשרת ב- $\mathcal{S}$. נגדיר $Y = \bigcup S$ ונראה שלכל $A \in F$ מתקיים $\text{card}(Y \cap A) \le 1$. אי קיימים $x_1 \ne x_2$ בתוך $Y \cap A$. $x_1, x_2 \in Y \cap A$. לפי הגדרת Y קיימים $S_{t_1}, S_{t_2} \in S$ כך ש- $x_1 \in S_{t_1}$ ו- $x_2 \in S_{t_2}$. S שרשרת ולפי שני איברים נתונים היא שרשרת בגודל 2. נניח בה"כ כי $S_{t_1} \subseteq S_{t_2}$ ולפי $x_1, x_2 \in S_{t_2}$ ולכן $|S_{t_2} \cap A| \ge 2$ וזה בסתירה לכך ש- $S_{t_2} \in S$ ומתקיים $|S_{t_2} \cap A| \le 1$. לפי לכל $A \in F$ $\text{card}(Y \cap A) \le 1$ ולכן $Y = \bigcup S \in \mathcal{S}$. לפי מתקיים תנאי לקמה והמקסימלי של האלפבית $\mathcal{S}$ ולכן קיים איבר מקסימלי M ב- $\mathcal{S}$. נראה שלכל $A \in F$ כך ש- $\text{card}(A \cap M) = 0$. נניח כי $A \ne 0$ ויהי $x \in A$ ונגדיר את $\tilde{M} = M \cup \{x\}$. אז לכל $B \in F$, $B \ne A$ $\text{card}(\tilde{M} \cap B) = \text{card}(M \cap B) \le 1$. אם $B = A$ אז $\text{card}(\tilde{M} \cap B) = 1$ ולכן $\tilde{M} \in \mathcal{S}$ אך $\tilde{M} \ge M$ ולכן קיבלנו סתירה למקסימליות של M. ולכן לכל $A \in F$ $\text{card}(M \cap A) = 1$ ולכן M מהווה קבוצה בגודל $\aleph_0$ עבור משפחת הקבוצות F.

שאלה 4

אם נגדיר $f:\{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא:

לכל $r \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$f(r) = s(n,m) = (r(2n), r(2m+1))$$

אז אין מנה כי $0 \in \mathbb{N}$.

נראה כי f חח"ע ועל:

f חח"ע: יהיו $r_1, r_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ כך ש- $r_1 \neq r_2$ לכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $r_1(n) \neq r_2(n)$ ונסמן $S_1 = f(r_1)$ ו $S_2 = f(r_2)$. אם n זוגי אז לכל $m \in \mathbb{N}$ נקבל:

$$S_1\left(\frac{n}{2}, m\right) = \left(r_1(n), r_1(2m+1)\right)$$

$$S_2\left(\frac{n}{2}, m\right) = \left(r_2(n), r_2(2m+1)\right)$$

כיוון ש- $r_1(n) \neq r_2(n)$ נקבל $S_1\left(\frac{n}{2}, m\right) \neq S_2\left(\frac{n}{2}, m\right)$ ולכן $S_1 \neq S_2$.

אם n אי זוגי ~~[illegible]~~ ויהי $m \in \mathbb{N}$ נקבל:

$$S_1\left(m, \frac{n-1}{2}\right) = \left(r_1(2m), r_1(n)\right)$$

$$S_2\left(m, \frac{n-1}{2}\right) = \left(r_2(2m), r_2(n)\right)$$

וכיוון ש- $r_1(n) \neq r_2(n)$ נקבל $S_1\left(m, \frac{n-1}{2}\right) \neq S_2\left(m, \frac{n-1}{2}\right)$ ולכן $S_1 \neq S_2$.

לכן f חח"ע.

f על: יהי $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ נגדיר $r \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא:

לכל n זוגי $r(n)$ שווה לאיבר המתאים ~~[illegible]~~ במטריצה הקרטזית של s ~~[illegible]~~ עבור $S\left(\frac{n}{2}, m\right)$ כאשר $m \in \mathbb{N}$. לכל n אי זוגי $r(n)$ שווה לאיבר הימני במטריצה הקרטזית של s עבור $S\left(m, \frac{n-1}{2}\right)$ כאשר $m \in \mathbb{N}$. כך נקבל כי $s(n,m) = \left(r(2n), r(2n+1)\right)$

ולכן f על.

הערה: סיכום של הפונ' f: לכל סדרה $(a_1,a_2,\dots)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

f מזווגת את איברי הסדרה כך:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$

$$(a_1, a_3, a_5, \dots) \times (a_2, a_4, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

בס אוסף כל הפולינומים ממעלה 2 עם מ-מ $c\neq 0$ שהם אי-זוגיים ל- $\mathbb{Z}\setminus\{0\}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ מתקיים $|\mathbb{Z}\setminus\{0\}|=\aleph_0$ כיוון ש- $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$ והחיתוך איבר אינה משנה אי-זוגיות של רק' המתמיה כי אם לא עם רק אי-זוגי לאחר החיתוך איבר אי-זוגי ויקבלו קבוצה מ- $\aleph_0$ ולכן סופית ולכן שוב לאחר הוספת איבר אי-זוגי ויקבל תהיה סופית ולא $\aleph_0$ הסתירה).

כל פולינום מעל האוסף הזה על אי מקדמי איברים נמצא אם באוסף פולינומים הנ"ל $\tilde{P}$ המקיים $|\tilde{P}|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}|$

כמו כן מספר הפולינומים של רק' בעלי מעלה מ"ד מתמיה ולכן נקבל:

$$|\tilde{P}|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}| \underset{\text{הגדרת של מכפלה}}{=} \aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\aleph_0 =$$

$$\underset{\text{אסוציאטיביות בכפל עוצמות}}{=} \aleph_0\cdot(\aleph_0\cdot\aleph_0) \underset{\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0}{=} \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$$

לכל פולינום $p\in\tilde{P}$ נסמן $Sol(p)=\{x\in\mathbb{R} \mid p(x)=0\}$ שורש של הפולינום p.

אם לכל המספרים הממשיים שהם שורשים של משוואות מהצורה ax^2+bx+c הוא $\bigcup_{p\in\tilde{P}} Sol(p)$. קיבלנו כי האוסף הוא איחוד בן מנייה של קבוצות סופיות ולכן לפי משפט עלמה $\left|\bigcup_{p\in\tilde{P}} Sol(p)\right|\le\aleph_0$, מאידך גיסא,

יהי $q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ אזי q הוא פתרון של פולינום p מהצורה $p(x)=-mx+n$ ולכן $\mathbb{Q}\subseteq\bigcup_{p\in\tilde{P}} Sol(p)$

$\Leftarrow \aleph_0=|\mathbb{Q}|\le\left|\bigcup_{p\in\tilde{P}} Sol(p)\right|$ ולכן לפי קנטור שרדר ברנשטיין נקבל כי $\aleph_0=\left|\bigcup_{p\in\tilde{P}} Sol(p)\right|=M$.

לכל $k\in K$ נגדיר $A_k=\{(s,m,t)\in\mathbb{Q}\times M\times\mathbb{Q} : sm+t=k,\ s,t\in\mathbb{Q},\ m\in M\}$

כלומר לכל $k\in K$ A_k הוא אוסף $s,t\in\mathbb{Q}$, $m\in M$ כך ש- $sm+t=k$. עפ"י אקסיומת הבחירה קיימת פונקציה $f:K\to\bigcup_{k\in K}A_k$ כך שלכל $k\in K$ $f(k)\in A_k$.

נגדיר $g:K\to\mathbb{Q}\times M\times\mathbb{Q}$ ע"י

$$g(k)=f(k)\quad\forall k\in K$$

נראה ש- g חח"ע.

יהיו $k_1,k_2\in K$ כך ש- $k_1\ne k_2$. יהי $f(k_1)=f(k_2)=(s,m,t)$

נקבל $k_1=sm+t$, $k_2=sm+t$. ולכן $k_1=k_2$ בסתירה.

לכן $f(k_1)\ne f(k_2)$ ולכן $g(k_1)\ne g(k_2)$ $\Leftarrow$ g חח"ע

$\Leftarrow |K|\le|\mathbb{Q}\times M\times\mathbb{Q}|$ ומכאן:

$|\mathbb{Q}\times M\times\mathbb{Q}|=\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0(\aleph_0\cdot\aleph_0)$

(חזקות נלמדו בכל מקרה) $(\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0)$

$=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

מתקיים: $\aleph_0\le|K|\le\aleph_0<2^{\aleph_0}=\aleph$ ולכן $|K|<|\mathbb{R}|$ ומכאן

$K\ne\mathbb{R}$ ולכן הטענה איננה נכונה.

שאלה 6

אם $P(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ כולל איזשהו כל הגרפים כ-$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ גרוע
אוסף כל הפונ' מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ כלומר אוסף כל הגרפים
ניתן ערכים כ-$\mathbb{R}$ (שמוגדר $\mathbb{R}$) לכן $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subseteq P(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.
בגלל (*) עלינו שיהיו קבוצות A, B כך ש- $|A|\le|B|$ אבל
$|P(A)|\le|P(B)|$.

הוכחה: נשתמש לפי הנחה קיים $f:A\to B$ חח"ע.
אפשר לגדיר $h: P(A)\to P(B)$ כבלבד
$\forall X\in P(A)\quad h(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$.
נראה כי h חח"ע. יהיו $X_1,X_2\in P(A)$ כך ש- $X_1\neq X_2$.
בלי ש"ל $x\in X_2$ אך $x\notin X_1$. לכן $f(x)\in h(X_2)$
אם $f(x)\in h(X_1)$ אזי קיים $\hat{x}\in X_1$ כך ש- $f(\hat{x})=f(x)$
אך בהנחה $\hat{x}\neq x$ כי $x\notin X_1$ ומכן f חח"ע לכן
מגיע סתירה לכך ש- $f(\hat{x})\neq f(x)$. $\Leftarrow$ לכן $f(x)\notin h(X_1)$
$\Leftarrow h(X_1)\neq h(X_2)$ ולכן h חח"ע. ומכאן:

$$|P(A)| \le |P(B)|$$

מתקיים $|\mathbb{R}| = \aleph = 2^{\aleph_0}$ ולכן $\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$

$$= 2^{\aleph_0} \Rightarrow \aleph^{\aleph_0} = \aleph$$

ולכן מקבלים $\aleph \cdot \aleph \ge \aleph \cdot 1 = \aleph$

ומן $\aleph \cdot \aleph = \aleph^2 \le \aleph^{\aleph_0} = \aleph$

ולכן $\aleph \cdot \aleph = \aleph$. ולכן $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$

לעומת (*) נובע כי $|P(\mathbb{R})| \le |P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})|$ ו- $|P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| \le |P(\mathbb{R})|$

כי $|\mathbb{R}| \le |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$ ו- $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \le |\mathbb{R}|$ לכן מקנטור

ברנשטיין $|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})|$, לפי סעיף ד' מתקיים

$$|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| \ge |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$$

מצד שני מתקיים: $f \in P(\mathbb{R})$

$$|P(\mathbb{R})| = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}|$$

ולכל $f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ מתקיים $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (הוא

של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ וכל תת הקבוצות של $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$) ולכן

$$|P(\mathbb{R})| = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}| \le |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \Leftarrow \{0,1\}^{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

ולכן מקנטור ברנשטיין נקבל $|P(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$

בהנחת אקסיומת הבחירה לכל קרדינל אינסופי a מתקיים $a = a^2 = a \cdot a$. בהוכחת המשפט מסדרים קבוצה הסדר טוב ושונים שמשפט הסדר הטוב משתמש באקסיומת הבחירה (לצורך הגדרת הפונקציה הרקורסיבית)

נקבל כי המשפט נכון תחת אקסיומת הבחירה. בהנחת אקסיומת הבחירה

אם כך, תהי קב' X אינסופית אז $|X| = |X| \cdot |X|$

ולכן $|P(X)| = |P(X \times X)|$ לפי הטענה בסעיף ב', ואז הוא קרדינל אינסופי כי X קב' אינסופית

~~[illegible]~~ וכמו סדר האתחולים מתקיים עבור X

$$|X^X| \le |P(X\times X)| = |P(X)|$$

יחס של אתחול והגדרה ב־X.

ובן $|P(X)| = |\{0,1\}^X| \le |X^X|$

ולכן לפי קנטור ברנשטיין $|P(X)| = |X^X|$.

<u>הערה:</u> בהוכחה המשפט שלפי קבוצת אינסופית a $a\cdot a = a$ מתבטאים בכך שלפי קבוצת $\mathbb{Z}$ סדר טוב לפי משפט הסדר הטוב של Zermelo ולפי כן יש סימון באקסיומת הבחירה, והכוונה מתבטאים בכך שלפי קבוצת [illegible] קיים אורדינל α [illegible] ולכן ניתן לחבר את כל הכמות של אורדינל אינסופי כך הינתן קבוצת X אינסופית עם עוצמה אינסופית $|X| = a$.

במשפט הסדר הטוב מתבטאים באקסיומת הבחירה ע"י הגדרת $C: P(X)\setminus\{\emptyset\} \to X$ עבור כל X נתון כך שלכל $A \subseteq X$ $C(A) \in A$ ומגדירים

$$F: P(X) \to X \cup \{*\} \quad F(A) = \begin{cases} C(A) & A \subseteq X,\ A \neq \emptyset \\ * & A = \emptyset \end{cases}$$

$* \notin X$ נבחר

אינו אלגברי $X = \frac{r}{s} \cdot m + \frac{q}{p}$

$b \cdot \left(\frac{r}{s} m\right)$

$$am^2 + bm + c = 0$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$s \cdot m + t$

לינ' פר'

$$K \to S \times M \times T$$

$$S \quad M \quad T$$

$$k \in K = (s, m, t)$$

$\aleph_0 \quad \aleph_0 \quad \aleph_0$

A_k { אוסף כל המספרים האלגברי של k) k מעל $\mathbb{Q}$

$$F: K \to \bigcup A_k$$

$$A_k = \{(s, m, t) \in \mathbb{Q} \times M \times \mathbb{Q} \mid s \cdot m + t = k\}$$

$$F(k) \in A_k$$

$$g: K \to S \times M \times T$$

$$g(k) = F(k)$$

$|K| \le |S \times M \times T| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0$ $\Leftarrow$ g חח"ע

מכון טכנולוגי חיפה

מכון טכנולוגי חיפה

מכון טכנולוגי חיפה

מכון טכנולוגי חיפה

<u>תרגיל</u>

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ← קבוצת כל $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}| \le |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$$

לפי קבוצת חזקה $|X|\cdot|X| = |X|$

$$2\cdot\omega_1 = \omega_1 \qquad 1+\omega$$

$$\omega\cdot 3 = \omega+\omega+\omega$$

$$\omega_1+\omega+\omega+\omega+3$$

$$2\cdot\omega_1+\omega\cdot 3$$

$= \aleph_0$ $\quad \{\mathbb{R}(z)=0 \mid z\in\mathbb{Q}\}$ $\quad \mathrm{Sol}(P)$

$$\omega\cdot 3+\omega_1 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \omega\cdot 3+\alpha$$

לכל α

$\omega\cdot 3+$

$\omega\cdot 3+\omega_1+3$

$\underbrace{\omega+\omega+\omega}$ $\quad \underbrace{\omega_1}$ $\quad \underbrace{3}$ $\quad \omega_1\cdot 3=\omega$ $\qquad \omega+\omega+\omega$

$$\omega_1+\omega\cdot 3+3$$

$\underbrace{\omega_1}$ $\quad \underbrace{\omega+\omega+\omega}$ $\quad \underbrace{3}$

$(1,0,1,\dots)$ $\quad S(1,m)$ $\quad \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$(0,1,0,1,\dots)$ $\quad 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}$ $\quad$ 4

$(0,1,\dots)\times(0,1,\dots)$ $\quad \mathbb{R} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad X = X\cdot X = X$

הנקודה היא $\aleph_1$ על מס' אלפרים ולכן לא

בגלל $\aleph$ מס' שאינו אלפ כי יש פעולה כזו $x\in K$

$x = S\cdot m+t$ ולכן x מתכנס על המשוואה

$= x$