12/09/12

0366-3126

סמסטר א', תשע"ב

בחינה בתורת הקבוצות

מרצה: מוטי גיטיק

מתרגל: אילון בילינסקי

משך הבחינה שלוש שעות.
יש לענות על 4 שאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
יש לנמק את טענותיכם ולצטט במדוייק משפטים עליהם נסמכים בפתרון. השימוש בחומר־עזר אסור.

ענו על 4 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות:

1. הוכיחו משפט $Ulam$ הבא: מדיד ממשי בעל מידה ללא אטמים הוא $2^{\aleph_0} \geq$.

2. נניח כי κ הוא גבול של סדרה עולה ורציפה של מונים $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$. נניח בנוסף כי לכל $\lambda < \kappa$ מתקיים $\lambda^{\aleph_1} < \kappa$. תהי $F \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \kappa_\alpha^+$ משפחה של פונקציות שונות על סל"ח.
הוכיחו כי אז $|F| \leq \kappa^+$.

(זו הטענה האחרונה בהוכחת משפט $Silver$ אין צורך להוכיח את שאר הטענות.)

3. יהיה U על מסנן נורמלי על κ.
הראו כי
$\{\alpha < \kappa \mid$ אי נשיג חזק $\alpha \} \in U$.

4. הראו כי קבוצת המונים החריגים מתחת לאי נשיג חלש היא שבת.

5. נגדיר משחק לשני שחקנים באופן הבא:
כל שחקן לפי תורו בוחר סודר בן מניה. הסודר הנבחר אמור להיות גדול מכל הסודרים שנבחרו במהלכים הקודמים ע"י שני השחקנים.
אורך המשחק הוא ω_1. השחקן הראשון משחק בשלבים זוגיים וזה כולל כל השלבים הגבוליים. השחקן הראשון מנצח אם ורק אם קבוצת הסודרים שבחר מכילה סל"ח אחרת השני מנצח. מצאו אסטרטגיה ניצחון לאחד השחקנים.

6. הוכיחו כי $3 \Longleftarrow 2 \Longleftarrow 1$

(1) לכל קבוצה M ויחס $P \subseteq M \times M$ עם התכונה שלכל $x \in M$ קיים $y \in M$ כך ש־ $(x,y) \in P$.
קיימת סדרה $\langle x_n \mid n < \omega \rangle$ כך שלכל $n < \omega$ מתקיים $(x_n, x_{n+1}) \in P$.

(2) לכל משפחה בת מניה של קבוצות לא ריקות קיימת פונקצית בחירה.

(3) איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה.

בהצלחה!

AAAC-42

14/09/11

0366

בחינה בתורת הקבוצות

סמסטר א' תשע"א מועד ב'
2010-2011

המורה: מ. גיטיק

משך הבחינה: 3 שעות
יש לענות על 4 מתוך 6 שאלות הבאות.

שאלה 1

יהי κ מדיד ממשי בעל מידה ללא אטומים. הוכיחו $2^{\aleph_0} \geq \kappa$.

שאלה 2

הוכח כי אם $F \subseteq \prod_{\alpha<\aleph_1} \aleph_{\alpha+1}$ מורכבת מפונקציות שונות על סל"ח
ולכל α בן מניה $\aleph_{\omega_1} > \aleph_\alpha^{\aleph_1}$ אז $|F| \geq \aleph_{\omega_1+1}$.

שאלה 3

הוכיחו משפט Fodor על פונקציה דוחסת.

שאלה 4

הראו בעזרת אקסיומת הבחירה כי כל סדר חלקי ניתן להרחיב לסדר קווי.

שאלה 5

יהי U על מסנן נורמאלי על κ ו- $A \subseteq \kappa$ לא שבת.
הראו כי אז A לא שייכת ל – U.

שאלה 6

נקרא לשתי פונקציות חלקיות סופיות f,g מ- $\aleph_1$ ל- 2 מתיישבות אם $f \cup g$ היא פונקציה.
יהי F אוסף של $\aleph_1$ פונקציות סופיות חלקיות מ- $\aleph_1$ ל- 2. הראה כי יש $H \subseteq F$ בעוצמה $\aleph_1$ כך שכל שתי פונקציות מ- H הן מתיישבות.

בהצלחה!

AAAC-43

0366- 1105

מבחן במבוא לתורת הקבוצות

סמסטר ב' תשע"א, מועד א'
תאריך: 3.7.2011 מרצה: פרופ' אלי גלזנר
משך הבחינה 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
20% לכל שאלה.

ענו על שתי השאלות הבאות בפירוט מלא:

1. הוכיחו כי לכל שני מספרים קרדינליים a , b אינסופיים מתקיים:

(i) $a^2 = a$ (ii) $a+b = ab = \max(a,b)$

2. הגדירו אורדינל והראו שאם α אורדינל ו $\beta \in \alpha$ אז גם β אורדינל.

ענו על שלוש מארבע השאלות הבאות. הסבירו תשובותיכם.

3. האם ניתן להציג את $\mathbb{R}^3$ כאיחוד בן מניה של ישרים (לאו דוקא העוברים דרך הראשית).

4. מהי עצמת הקבוצות הבאות:

א. אוסף הפונקציות החד-חד-ערכיות ב $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
ב. קבוצת המחרוזות האינסופיות של האותיות a,b שאינן מכילות את הרצף aa.

5. מארבעת התנאים הבאים על פונקציה $f : X \to X$ שלושה הינם שקולים:

א. f כיחס הינו טרניזיטיבי.
ב. $f = id$ or $f = const$.
ג. $f|_{Im(f)} = id_{Im(f)}$
ד. $f \circ f = f$

תנו דוגמה לפונקציה f מהמישור לישר המקיימת את שלשת התנאים הללו ולא את הרביעי.

6. תהי $f : X \to Y$ פונקציה. הראו כי התנאים הבאים שקולים:

א. f הינה חד-חד-ערכית.
ב. ההעתקה המושרית $f : P(X) \to P(Y)$ הינה חד-חד-ערכית.
ג. ההעתקה המושרית $f^{-1} : P(Y) \to P(X)$ הינה על.

בהצלחה!

AAAC-44

0366-1105

מבחן במבוא לתורת הקבוצות

סמסטר א' תש"עב, מועד א'
תאריך: 26.2.2012 מרצה: פרופ' אלי גלזנר
משך הבחינה 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.

ענו על השאלה הבאה בפירוט מלא: (30%)

1. הוכיחו כי לכל שני מספרים קרדינליים a , b אינסופיים מתקיים:

(i) $a^2 = a$ (ii) $a+b = ab = \max(a,b)$

ענו על שלוש מארבע השאלות הבאות. הסבירו תשובותיכם. (24% לכל שאלה)

2. קיבעו את הסדר (כולל שיוויון) של המספרים הבאים:

$3^{\omega}, \quad \omega_1^{\omega}, \quad \omega, \quad \omega^3, \quad \omega 3, \quad \omega\omega_1, \quad \omega_1\omega$

קודם כקרדינלים ואז כאורדינלים

3. מהי עצמת הקבוצות הבאות:

א. אוסף הפונקציות החד-חד-ערכיות ב $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
ב. קבוצת המחרוזות האינסופיות של האותיות a,b שאינן מכילות את הרצף aa.

4. הוכיחו כי לכל קבוצה לא ריקה X מתקיים:
$|X| < 2^{|X|}$.

5. תהי A קבוצה אינסופית ותהי $B \subseteq A$ קבוצה חלקית כך ש $|B| < |A|$.
הראו כי $|A| = |A \setminus B|$. (מותר להסתמך על משפטים שהוכחו בהרצאה.)
האם נעשה בהוכחה שימוש באקסיומת הבחירה ואם כן כיצד ?

בהצלחה!

AAAC-45

0366-1105
15/9/51

מבחן במבוא לתורת הקבוצות

סמסטר ב' תשע"ב, מועד א'
תאריך: 15.7.2012 מרצה: פרופ' אלי גלזנר
משך הבחינה 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.

ענו על השאלה הבאה (30%) בפירוט מלא:

1. תהינה $(X, \leq)$ ו $(Y, \leq)$ שתי קבוצות סדורות היטב. הוכיחו כי מתקיימת בדיוק אחת האפשרויות הבאות:

(i) $X \approx O(y_0)$, (ii) $X \approx Y$, (iii) $Y \approx O(x_0)$

עבור איברים $x_0 \in X$ ו $y_0 \in Y$. (הוכחה ללא שמוש באורדינלים.)

ענו על שלוש מארבע השאלות הבאות (24% כל אחת). הסבירו תשובותיכם.

2. קיבעו את הסדר (כולל שיוויון) של המספרים הבאים:

7^{ω_1}, ω_2^{ω}, ω, ω^3, $\omega_2 3$, $\omega_1\omega_2$, $\omega_1\omega$, $\omega\omega_1$

קודם כקרדינלים ואז כאורדינלים.

3. האם ניתן להציג את $\mathbb{R}^3$ כאיחוד בן מניה של מעגלים ?

4. תהי X קבוצה ומעליה יחס סדר טוב. הוכיחו כי לכל פונקציה מונוטונית עולה $f : X \to X$ (כלומר $x_1 < x_2$ גורר $f(x_1) < f(x_2)$) מתקיים: $\forall\ x \in X,\ x \leq f(x)$.

5. תהי A קבוצה אינסופית ותהי $B \subseteq A$ קבוצה חלקית כך ש $|B| < |A|$.
הראו כי $|A| = |A \setminus B|$. (מותר להסתמך על משפטים שהוכחו בהרצאה.)
האם נעשה בהוכחה שימוש באקסיומת הבחירה ואם כן כיצד ?

בהצלחה!

AAAC - 46

0366- 1105

מבחן במבוא לתורת הקבוצות

סמסטר א ו ב תשע"ב, מועד ב'
תאריך: 30.8.2012 מרצה: פרופ' אלי גלזנר
משך הבחינה 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.

ענו על השאלה הבאה (32%) בפירוט מלא:

1. הוכיחו כי לכל שני מספרים קרדינליים a , b אינסופיים מתקיים:

(i) $a^2 = a$ (ii) $a+b = ab = \max(a,b)$

ענו על שלוש מארבע השאלות הבאות (23% כל אחת). הסבירו תשובותיכם.

2. הראו שאם α אורדינל ו $\alpha \ni \beta$ אז גם β אורדינל.

3. מהי עוצמת האוסף C[0,1] של כל הפונקציות הממשיות הרציפות

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

4. הסבירו כיצד ניתן לקבל את אקסיומת הבחירה כתוצאה של עקרון המקסימום של האוסדורף. נסחו במדוייק את שתי הטענות.

5. הראו שקיימת משפחה $\mathscr{L}$ שאבריה תתי־קבוצות אינסופיות של $\mathbb{N}$, עוצמתה $2^{\aleph_0}$ ובנוסף לכל שתי קבוצות שונות $A_1, A_2 \in \mathscr{L}$ מתקיים ש $A_1 \cap A_2$ סופי.

בהצלחה!

AAAC -47