

# AAAC-34

## מבחן במבוא לתורת הקבוצות

סמסטר ב' התש"ע, מועד ב'

תאריך: 30.8.2010

מרצה: פרופ' אלי גלזנר

• משך הבחינה 3 שעות.

• אין להשתמש בכל חומר עזר.

ענו על שתי השאלות הבאות בפירוט מלא:

1. (א) הוכיחו את משפט דדקינד: קבוצה  $A$  שקולה לתת-קבוצה ממש שלה  $B \subsetneq A$  אם ורק אם יש תת-קבוצה  $D \subset A$  כך ש  $D \sim \omega$ .

(ב) קבוצה  $A$  נקראת סופית אם יש מספר טבעי  $n \in \omega$  כך ש  $A \sim n$ . השתמשו במשפט דדקינד והראו שקבוצה  $A$  אינה סופית אם ורק אם  $A$  שקולה לתת-קבוצה ממש שלה  $B \subsetneq A$ .

(ג) האם השתמשת באקסיומת הבחירה בסעיף (ב) ואם כן כיצד?

2. הראו שאם  $\alpha$  אורדינל ו  $\beta \in \alpha$  אז גם  $\beta$  אורדינל.

ענו על שלוש מארבע השאלות הבאות. הסבירו תשובותיכם.

3. מהי עוצמת האוסף  $C[0, 1]$  של כל הפונקציות הממשיות הרציפות  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ?

4. הראו שלא ניתן לכסות את המישור  $\mathbb{R}^2$  ע"י אוסף בן מניה של ישרים.

5. הראו שלכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A^A \subset \mathcal{P}(A \times A)$ . השתמשו בעובדה זו ובעובדה ש  $a^2 = a$  לכל קרדינל אינסופי  $a$  כדי להראות ש  $a^a = 2^a$  לכל קרדינל אינסופי  $a$ .

6. תהא  $X$  קבוצה סדורה היטב. נגדיר את היחס הבא על  $X \times X$ :

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff \max\{x, y\} < \max\{x', y'\} \text{ or } \max\{x, y\} = \max\{x', y'\} \text{ and } (x, y) \leq_{lex} (x', y').$$

הראו ש  $\preceq$  הוא סדר טוב מעל  $X \times X$ .

בהצלחה!

מחברת מס' \_\_\_\_\_  
 סתור \_\_\_\_\_ סחברות

6

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)  
 לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

**הפקולטה למדעים מדויקים**  
**ע"ש ריימונד וברלי סאקלר**

- הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המסגרות ולנהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

**נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משפטי.**

תאריך הבחינה 30/8/10  
 שם הקורס מכניקה קלאסית  
 שם המורה ד"ר אריאל שניידר

- על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
- אין להחזיק סלפונים ניידים או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחוק מסקום מושב.
- אין להחזיק כהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
- קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמסגרת.
- נבחן לא יעזוב את סקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמסגרת. בעת יציאה מן החדר יפקיד הנבחן את סחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המסגרת.
- נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידי, לא יחזיק רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות מסועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למסגרת את הסחברת ואת השאלון, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה יחשב כמי שנבחן בסועד זה וציונו יהיה "0".
- אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת בסקום המיועד לכך בלבד.
- אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
- יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל סיד המסגרת את התעודה המזהה.
- אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.



לשימוש המורה הבוחן:

הציון 100  
 המחברת נבדקה ביום \_\_\_\_\_  
 חתימת המורה [Signature]

3014744

בהצלחה.

$$\frac{I}{\sqrt{17}}$$

$$25 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right. \quad 1$$

$$25 \quad 2$$

$$\frac{II}{\sqrt{17}}$$

$$17 \quad 3$$

$$17 \quad 4$$

$$17 \quad 5$$

$$100 \quad \overset{11}{2 \approx 0}$$

①  $A \subseteq B$  שקולה/מתקבלת ממנה שיהיה  $B \subseteq A \iff$  קיימת נגזרת  $A \subseteq B$  וזה  
 $\Rightarrow$  תהיה  $A \subseteq B$  כך ש-  $D \sim W$ ,  $A \subseteq B$  קיימת פונקציה חד-חד-ערכית

$A \subseteq B \iff \exists f: W \rightarrow D$  כזה ש-  $f[W] = A$

תהיה  $F$  הפונקציה הזאת:  $F: A \rightarrow A$

$$F(a) = \begin{cases} a & a \notin D \\ f(n+1) & a \in D \end{cases}$$

כאשר  $n$  הוא האינדקס של  $a$  ב-  $D$  (כלומר  $a = f(n)$ )

כל  $a \in A$  חתום ב-  $f$

$F$  היא חד-חד-ערכית ולא על.

- חזרה: ①  $a' \in D, a'' \notin D$  ש-  $F(a') = F(a'')$  (אז  $a' = f(n)$  ו-  $a'' = f(n+1)$  וזה בלתי אפשרי)  
 ②  $a' \in D, a'' \notin D$  ש-  $F(a') \neq F(a'')$  (אז  $F(a') \in D$  ו-  $F(a'') \notin D$ )  
 ③  $a' \in D, a'' \notin D$  ש-  $F(a') \notin D$  ו-  $F(a'') \in D$  (אז  $F(a') = f(n)$  ו-  $F(a'') = f(m)$  וזה בלתי אפשרי)

לכן  $F$  היא חד-חד-ערכית. יהיה  $a_0 \in A$  ו-  $a_0 \notin D$  (אז  $F(a_0) = a_0$ ).  
 כל  $a \in A$  הוא האינדקס של  $a_0$  ב-  $A$  (כלומר  $a = f(n)$ )

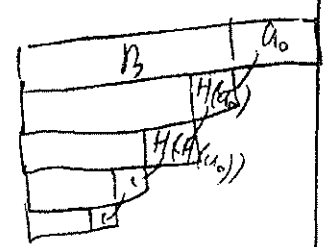
קיימת  $A \subseteq F[A] \subseteq A$  וכיון שאין אמצע הוכחה.

תהיה פונקציה  $H: A \rightarrow B$  חד-חד-ערכית וזה

①  $H(a_0) \in B$  ו-  $H(a_0) \notin A$  (אז  $H(a_0) \in B \setminus A$ )

יהיה  $a_0 \in A \setminus B$  ש-  $H(a_0) \in B$  (אז  $H(a_0) \in B \setminus A$ ).  
 $H[B] \subseteq H[A]$  ו-  $H[A] \subseteq H[B]$  (אז  $H[A] = H[B]$ )

לדבר  $H(n) = H^{(n)}(a_0)$  פונקציה חד-חד-ערכית  
 ו-  $H[n]$  היא תת-קבוצה של  $A$  השקולה ל-  $n$   
 (כלומר  $H[n] \sim n$ )



~~(2)  $A \sim B \iff \exists \text{ bijection } f: A \rightarrow B$~~   
 ~~$\Rightarrow$   $A \sim B \iff \exists \text{ bijection } f: A \rightarrow B$~~   
 ~~$\Leftarrow$   $A \sim B \iff \exists \text{ bijection } f: A \rightarrow B$~~

$A$  אינה סופית  $\iff B \subsetneq A$  קבוצה של  $A$

~~$A \sim A$  אינה סופית  $\iff A \subsetneq A$  קבוצה של  $A$~~

$\Rightarrow$  נניח  $A \sim B$  ונניח  $B \subsetneq A$  קבוצה של  $A$  –

(נראה באינדוקציה על  $|A|$   $B \subsetneq A$  ונניח  $|B| < |A|$  ונניח  $|A| = n+1$   
 אם  $|A| = 1$  ונניח  $|B| = 0$  והאז  $|B| < |A|$  ונניח  $|A| = n+1$   
 נניח  $|A| = n+1$  ונניח  $B \subsetneq A$  ונניח  $|B| < |A|$  ונניח  $|A| = n+1$

$B \subsetneq A$

$|A| = n+1$   $\Leftarrow$   $|B| < n+1$   $\Leftarrow$   $|B| \leq n$   $\Leftarrow$   $|B| < n+1$   
 $|A| = n+1$   $\Leftarrow$   $|B| < n+1$   $\Leftarrow$   $|B| \leq n$   $\Leftarrow$   $|B| < n+1$   
 $|A| = n+1$   $\Leftarrow$   $|B| < n+1$   $\Leftarrow$   $|B| \leq n$   $\Leftarrow$   $|B| < n+1$   
 $|A| = n+1$   $\Leftarrow$   $|B| < n+1$   $\Leftarrow$   $|B| \leq n$   $\Leftarrow$   $|B| < n+1$



מספר  $\omega$  (הכאן  $\omega$  אינו סופי)  $\equiv$  ק"מ  $DC A$   $\omega$

תהיה  $C: P(A) \rightarrow A$  פונקציה כחיתת  $(C(B) \in B \mid B \subseteq A)$

אל  $\tilde{C}: \mathbb{N} \rightarrow A$  (רצף)

$$\tilde{C}(n) = C(A \setminus \{\tilde{C}(0), \tilde{C}(1), \dots, \tilde{C}(n-1)\})$$

הפונקציה  $\tilde{C}$  איננה תחזית בוחנים מהקבלים שאיננו צומת  
 אלא  $\tilde{C}$  הקבלים. כיוון  $A$  אינו סופי. אחר, התסדרה תחזית  
 (ואילו אבריו)  $(A \sim \mathbb{N})$

$$\tilde{C}[\mathbb{N}] \sim \mathbb{N} \sim A$$

$$\tilde{C}[\mathbb{N}] \subset A$$

□

(ג) ע"כ אומרים אף סדר (ב) ~~הפונקציה~~ דאקס' הבחירה.

כי הפונקציה  $\tilde{C}$  בונה סדרה אקדמית אומריבקה  
 (הקסיונות).

✓







④ לא ניתן לבטל את המילוי  $\mathbb{R}^2$  ע"י אלסר בן מניה של ימים.

יהא  $S$  אלסר בן מניה של ישרי במילוי. עוצמת הכיוונים במילוי  
 היא  $\lambda$  (ע"י ציור עם הכיוון החיובי או ציור  $\lambda$  עוצמת הכיוונים  
 בעצמה הקטע (דדס) לכן יש כיוון סלע מאטין ישר  $S$  אחידה המאטה חתך  
 לכן יהא  $S$  ישר במילוי שאינו  $S$ . עוצמת הכיוונים  
 עוצמת הנק  $S$  יהא  $\lambda$  (כפי שנתנו הפונ'  $\lambda + \mu$  אי כחקה  $S$ )  
 מקביל - אפוא הצרכים ע"י הורפה אלק  
 כל ישר  $S$  נחתק עם  $S$  לא היותר פעם אחת (בעצם בדיוק)  
 פעם אחת

$$|f_0| = |\sum_{n=1}^{\infty} (f_n, f_0)| = |\sum_{n=1}^{\infty} (f_n, f_0)| \leq \lambda_0$$

כלומר לא היותר פעם אחת הנקודה המשותפת  $S$  ו- $S$   
 היא  $\lambda$  לכן לא יתכן  $S$  מכסה את המילוי  
 כי מיטק של ישר עם  $S$  המילוי הוא היש נדמו  
 והוא מכסה  $\lambda$  נקודות.



~~XXXXX סדרה הטלה, מוגדרת על ידי~~

(5) לכל קבוצה  $A$   $A^A \subset P(A \times A)$  בקבוצת הסגור  $A/A$

הוכחה: פונקציה היא סוג של 'חס מסוים'  $M$  פונקציה  $A/A$  הוא יחס כך לכל  $a \in A$  מותאם  $b \in A$  'חייב' כך  $(a, b) \in M$  (מבט ביחס).

יחס  $\mathcal{R}$  מקני  $A/A$  הוא דת קבוצה של  $A \times A$   
אם כי פונ' כזו היא דת קבוצה של  $A \times A$  אף שיתר  $P(A \times A)$

(6)  $a^a = 2^a$  ( $a$  קרדינל אינסופי)

הוכחה: תהא  $A$  קבוצה שסגורה  $a$ , יס/הכאל

$|A^A| = |\{a, a\}^A|$

(כאן  $A^A \subset P(A \times A)$  אבל  $A^A$  היא פונקציה  $A/A$  מסתמס  $\{a, a\}^A$  שזהו פונקציה  $A/A$  מסתמס  $\{a, a\}^A$  מתקבל רק-העכט  $a, 1 - a$ .

אכן  $a^a = |\{a, a\}^A| \leq |A^A| = a^a$  (הערה: פונ' חת' בין קב' היא פונ' העתה-צ' הקב' הכולל)

$A^A \subset P(A \times A)$  בהוכחה (6) חלק

$a^a = |A^A| \leq |P(A \times A)| = 2^{|A \times A|} = 2^{a \cdot a}$

הכאלו  
כבידה קטילה  
צ' הסת' האסניר

$2^{|A \times A|} = 2^{a \cdot a} = 2^a$

$a \cdot a = a$   
אם קרדינל  
אינסופי

הס' כ' קטלנו  $2^a \leq a^a \leq 2^a$  אף קטלר בקטל'ן מתקל' היסיון  $a^a = 2^a$

לשימוש המרצה בלבד

**טבלה לחישוב ציונים**

[illegible]