

AAAC-29

28.08.09

בחינה בתורת הקבוצות מועד א' תשס"ט.

המורה: פרופסור יורם הירשפלד

משך הבחינה שעתיים וחצי. לא תינתן הארכה. ענה על 4 מ 6 השאלות. מותר להיעזר בארבעה דפי סיכום שנכתבו בכתב יד.

הקדש זמן בתחילת הבחינה לקרא ולהבין את השאלות. אין צורך לענות לפי הסדר, או לענות על חלקי שונים ברציפות, אבל רצוי לציין אם צפוי דיון נוסף בשאלה בהמשך. בהצלחה!

1. בכל אחד מהסעיפים תן דוגמאות ל 3 קבוצות A, B, C המקיימות את הקשר המתואר בסעיף:

א. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ ב. $(A \cap B) \cup C \supset A \cap (B \cup C)$

ג. $(A \cap B) \cup C \subset A \cap (B \cup C)$ (זכרו כי \subset היא הכלה חזקה)

אין צורך להוכיח דבר. רשמו בכל סעיף מי הן שלוש הקבוצות A, B, C ומי הן הקבוצות $(A \cap B) \cup C$ ו $A \cap (B \cup C)$ (יתכן שדיאגרמת Ven תמחיש לכם איזה קבוצות כדאי לבחור).

2. א. הביאו דוגמה שיתכן כי $g \circ f$ היא פונקציה הזהות I ($\forall x I(x) = x$) ובכל זאת f איננה פונקציה הפיכה.

ב. יהי נתון בנוסף שהפונקציה g היא חד חד ערכית האם f חייבת להיות הפיכה? הוכיחו את טענתכם.

3. על קבוצת המספרים הממשיים R מגדירים יחס: $a \approx b$ אם יש מספר שלם n כך ש $b - a = 2n \cdot \pi$.

א. (9 נקודות) הראה שזה יחס שקילות.

ב. על קבוצת המנה (הנקראת גם "קבוצת הזוויות") מבקשים להגדיר חיבור וכפל על סמך החיבור והכפל במספרים הממשיים. כלומר:

$$[a] + [b] = [a + b] \quad [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

לכל אחד מהשניים הוכח שההגדרה טובה, או הבא דוגמה המראה שהיא תלויה במיציגים.

4. R היא קבוצת המספרים הממשיים. מצא פונקציות חד חד ערכיות המוכיחות כי:

- כל הקטעים הפתוחים שזי עוצמה: לכל $a < b$ $|(0,1)| = |(a,b)|$
- הקטעים הפתוחים שזי עוצמה עם הישר כולו: $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$
- קטע פתוח שזי עוצמה לקטע סגור: $|(0,1)| = |[0,1]|$
- $|P(\mathbb{R})| = |\mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}|$

נא לתאר את הפונקציות במפורש כך שבהינתן עצם בתחום הפונקציה יהיה ברור מי בן זוגו. אין צורך בהוכחה שהפונקציה באמת חד חד ערכית או שהיא הפיכה, ומותר להיעזר בכך שאם $|A| \leq |B|$ ו $|B| \leq |A|$ הרי $|A| = |B|$

5. R היא קבוצת המספרים הממשיים. הוכח שמספר הקבוצות הסופיות או בנות מנייה ב $P(\mathbb{R})$ קטן ממספר הקבוצות שאינן בנות מנייה.

(הדרכה למעוניינים: הראה כי $|\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}| = \aleph$, ומכאן שמספר הקבוצות שהן בנות מנייה לכל היותר הוא \aleph . הסבר מדוע לא יתכן שמספר הקבוצות שאינן בנות מנייה גם הוא \aleph).

6. A קבוצה ו M קבוצה של יחסים על A . יהי $\bar{R} = \bigcup_{R \in M} R$.

- הוכח שאם כל $R \in M$ הוא סימטרי גם \bar{R} סימטרי.
- הראה שאם M סדורה בסדר שלם על ידי היחס \subset ואם כל $R \in M$ הוא טרנזיטיבי הרי גם \bar{R} טרנזיטיבי.

מחברת מס' _____
מתוך _____ מחברות


**הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:**

הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

תאריך הבחינה 26.06.08
שם הקורס מקרא לתורת הקבלות
שם המורה סר' יורם הירשפלד
החוב/המגמה מתמטיקה

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק טלפונים ניידים או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישב יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשיח.

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)
206319204
10


7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידי, לא יחזיר את השאלון לחדר או לא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיוחזר למשיח את המחברת ואת השאלון, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "ס".

לשימוש המורה הבוחן:
הציון 98 (-100)
המחברת נבדקה ביום _____
חתימת המורה _____

8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.

10688

9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.

10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בחום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשיח את התעודה המזהה.

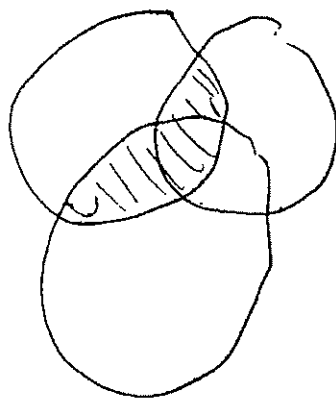
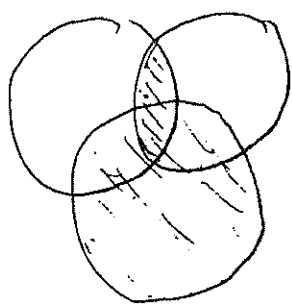
11. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

בחרתי
לספור
1, 3, 4, 5

~~הערה~~

~~הערה~~



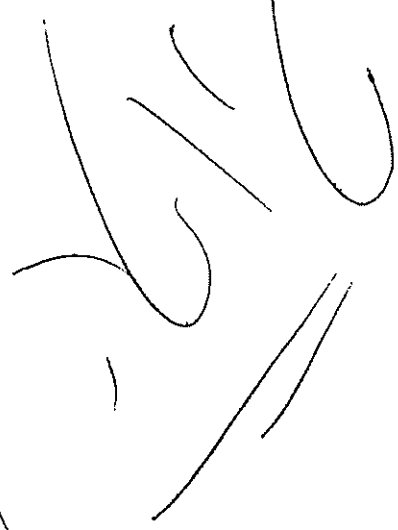
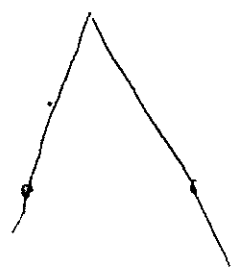
$$[n\pi + a] \cdot [2n\pi + b] =$$

$$[4n^2\pi^2]$$

$$[\pi] \cdot [2\pi] = [2\pi^2]$$

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}$$

f1.



$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

בחירת פונקציות
1, 3, 4, 5

$$(A \cap B) \cup C = \{1\}$$

'Sic $A = B = C = 1$

1 slice

100

$A \cap (B \cup C) = 214$

~~SECRET~~

1

$$\underline{(A \cap B) \cup C} = Q \cup C = 14$$

$$510, C=214$$

$\cancel{A} = \cancel{1} \cancel{0}$

2. זיון

$$114 = B$$

$$A \cap (B \cup C) =$$

1

$$= 21610 = 0$$

~~QC~~ 14



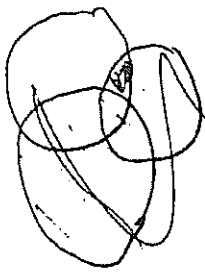
1221

~~2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100~~

~~(AAR) 108 - 2011, 2, 3, 4 - 15, 21~~

~~AP(UC) - 112~~

5



$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$C = \{1, 3, 4\}$$

~~$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$~~



$$C = A \cap B$$

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

~~$$A = \{1, 2, 3\}$$~~
~~$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$~~

~~$$A = \{1, 2, 3\}$$~~
~~$$B = \{1, 3, 4, 5\}$$~~
~~$$C = \{1, 3, 4\}$$~~

$$f: \{2\} \rightarrow \{3, 4\}$$

$$g: \{3, 4\} \rightarrow \{2\}$$

~~$$f: \{2\} \rightarrow \{3, 4\}$$~~

~~$$g: \{3, 4\} \rightarrow \{2\}$$~~

~~$$g \circ f = f$$~~

~~$$g \circ g = g$$~~

$$g \circ f = f$$

~~הוכחה~~ למה $\sqrt{3}$ איננו רציונלי

~~הוכחה~~

א. נניח כי $\sqrt{3}$ רציונלי.

נניח

1. יהיו a, b מספרים טבעיים, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ כי

$$0 = a - a = 2\pi = 0 \quad \text{כך} \quad \mathbb{Z} \ni 0 \quad \text{קיים}$$

נניח

2. יהיו a, b מספרים טבעיים, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ כי

$$a^2 = 3b^2 \quad \text{כך} \quad a^2 \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{כל} \quad a \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{כל} \quad b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$b - a = 2m\pi - \epsilon \quad \text{כך} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{כל} \quad a - b = 2n\pi$$

כל a, b ניקח $m = -n$ נקבל כי $b \equiv a \pmod{3}$.

$$b - a = -(a - b) = 2(n - m)\pi = 2m\pi$$

נניח

3. $\sqrt{3}$ איננו רציונלי. הוכחה:

$$a \equiv c \pmod{3} \quad \text{כל} \quad b \equiv c \pmod{3} \quad \text{כל} \quad a = b$$

$$a - b = 2m\pi \quad \text{כל} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{כך} \quad a - b = 2m\pi$$

$$b - c = 2n\pi \quad \text{כל} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{כך} \quad b - c = 2n\pi$$

$$a - c = 2k\pi \quad \text{כך} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a - c = a - b + b - c = 2m\pi + 2n\pi = 2(m+n)\pi$$

$$= 2(m+n)\pi$$

$$k = m + n \quad \text{כל} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a - c = 2k\pi \quad \text{כך} \quad k \in \mathbb{Z}$$

נניח

כל a, b יהיו a, b מספרים טבעיים.

נניח

ג. נראה כי $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ הטל לא הנדסה, אלא
כלומר הנדסה ~~תלויה~~ במייצגים:

ב- $a = 2\pi$ ו- $b = 2\pi$ נקבל כי $[a] = [b] = [0]$

כי $2\pi - 0 = 2\pi$ ולכן $[0] = [0] \cdot [0]$

לכן $[a \cdot b] = [4\pi^2]$

נראה כי לא קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$([4\pi^2] + [0]) = [4\pi^2]$ כלומר $4\pi^2 - 0 = 2n\pi$
 $n \in \mathbb{Z}$ כלומר

$4\pi^2 = 2n\pi$ כלומר

$2\pi = n$ כלומר

$\pi = \frac{n}{2}$ כלומר π רציונלי, לא

לכן באמת $4\pi^2 - 0 \neq 2n\pi$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.

$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ תלויה במייצגים.
של

נראה כי $[a] + [b] = [a+b]$ נוסדה, תלוי, כלומר

יש $[c] = [a]$ ו- $[d] = [b]$

$[a] + [b] = [a+b] = [c+d] = [c] + [d]$

$[c] = [a]$ ו- $[d] = [b]$ כלומר

$\exists m, n \in \mathbb{Z}, b = 2m\pi + d, a = 2n\pi + c$

לכן $a+b = 2(m+n)\pi + c+d$

$[a+b] = [c+d]$

של

14 - סעיף

$$f: (a,b) \rightarrow (0,1)$$

$$\forall x \in (a,b) \quad f(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

ה'חן סעיף 2, ה'חן סעיף 3, ה'חן סעיף 4

$$g: (0,1) \rightarrow (a,b)$$

$$\forall x \in (0,1) \quad g(x) = (b-a)x + a$$

ה'חן סעיף 4

$$f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

~~$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$~~

$$\forall x \in (0,1) \quad f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

~~$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$~~

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$$

$$\forall x \in (0,1) \quad f(x) = x$$

$$f: (0,1) \rightarrow [0,1]$$

ה'חן סעיף 4

$$g: [0,1] \rightarrow (0,1)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x=1 \\ \frac{1}{3}, & x=0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{2}, \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x = \frac{1}{2^n}, n \neq 0$$

$$\frac{x}{3}, \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x = \frac{1}{3^n}$$

ה'חן סעיף 4

$$f: \mathcal{P}(R) \rightarrow \{0,1\}$$

~~$$f: \mathcal{P}(R) \rightarrow \{0,1\}$$~~

$$f: \mathcal{P}(R) \rightarrow \{0,1\}$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(R)$$

$$f(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

הוכחה
 $h: (R \rightarrow \mathbb{Z}_2, 14) \rightarrow P(R)$ איז פונקציה

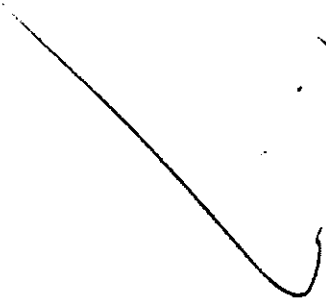
על פולינומים

$$h(g) = B \in P(R)$$

ע"פ

$$B = \{x \mid g(x) = 14\}$$

הוכחה



$$15 = \delta_{\text{קל}}$$

$$|N \rightarrow R| = X \quad \text{כאשר } X \text{ הוא מספר}$$

$$|N \rightarrow R| = |R|^{|N|} = 2^{X_0} = 2^{X_0 \cdot X_0} = 2^{X_0^2}$$

$$= X$$

$$|N \rightarrow R| = X \quad \text{ולכן}$$

~~באופן כללי, עבור כל מספר טבעי n, מתקיים:~~

מספר הקבוצות הנגזרות ממנה \otimes הוא הסופי
 ב- $P(R)$ לא עולה על $|N \rightarrow R|$, כי כל
 קבוצה בת מניה, \otimes היא סופית וניתנת לשימוש.
 סיון $(*)$ N , כלומר קיימת פונקציה \otimes ~~המקבילה~~ \otimes ~~ל~~

$N \rightarrow A \subseteq N \rightarrow R$ כאשר A הוא
 הקבוצה המצומצמת \otimes של קבוצת N \otimes A
 כלומר מספר הקבוצות הנגזרות ממנה
 או הסופיות לא עולה על X .

נניח בשלילה כי מספר הקבוצות \otimes
 הנגזרות ממנה ב- $P(R)$ קטן או שווה למספר
 הקבוצות הנגזרות ממנה, ולכן עוצמת קבוצה
 \otimes לא עולה על X , אבל

$$P(R) = A \cup B \quad \text{כאשר } A \text{ ו- } B \text{ קבוצות נגזרות}$$

$$P(R) = \left\{ \begin{array}{l} \text{קבוצות נגזרות} \\ \text{ממנה וסופיות} \end{array} \right\} \quad \text{ולכן}$$

$$2(X) = |P(R)| \leq |A| + |B| \leq X + X = X$$

סותר $2^X \leq X$

עכ"ל מספר הקבוצות שהן ~~שלוש~~
 לא בנות מניה ה- \mathbb{R}
 לצורך (אפילו) צמצום קבוצות אלו לצורך יותר מ-
 צמצום הקבוצות בנות המניה, והסדירות.