אוניברסיטת תל-אביב
פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' מועד ב'
תאריך: 17.04.2009

0366

מבחן סוף סמסטר בחשבון אינפיניטסימלי I

המרצה פרופ' א. שצ'רבק

משך המבחן 3 שעות
דף נוסחאות מצורף לתופס המבחן
אין להשתמש בחומר עזר נוסף, כולל מחשבון
יש לענות על 4 מתוך 6 שאלות. ערך כל שאלה 25 נקודות
רק תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה במלוא הנקודות

בהצלחה!

1. (א) הוכיחו כי לכל a למשוואה $x\sin^2 x+\ln x=a$ קיים פתרון.

(ב) חשבו $\int_{\ln c}^{2\ln c}\frac{e^x dx}{e^{2x}-c}$, $c>0$.

2. (א) חשבו $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-4}-\sqrt{x^4-12}}$.

(ב) חשבו את האינטגרל (אם קיים) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

www-20

3. נסתכל בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}\ , & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

, כאשר α מספר קבוע.

(א) עבור אילו ערכי α תהי $f(x)$ רציפה בכל הישר?

(ב) עבור אילו ערכי α תהי $f(x)$ גזירה בכל הישר?

4. נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה, גזירה ושלילית לכל x. הוכיחו:
x_0 נקודת קיצון מקומי של $f(x)$ אם ורק אם x_0 נקודת פיתול של הפונקציה
$g(x)=\int_0^x f^2(t)dt$. האם יש ל- $g(x)$ נקודות קיצון מקומי או מוחלט?

5. (א) תהי f פונקציה רציפה ב - $[a,b]$, וגזירה ב - (a,b) $(0<a<b)$, המקיימת
$\frac{f(b)}{f(a)}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש - $f(c)=-\frac{c}{2}f'(c)$.

(ב) מצאו מספר רציונאלי המקרב $\sin\frac{1}{2}$ עם דיוק 0.001.

6. חקרו פונקציה $y=\frac{x^3-3x^2+1}{x^3}$ לפי סעיפים הבאים: תחום הגדרה,
אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, קמירות, ונקודות פיתול.
סרטטו סקיצת הגרף.

בהצלחה!

אוניברסיטת תל-אביב
פקולטה למדעים מדויקים

חשבון אינפיניטסימאלי I **דף נוסחאות**

טריגונומטריה

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$

$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x};$ $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x};$

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$ $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2};$ $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)];$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)];$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)];$

פולינום טיילור (מק-לורן) של $f(x)$ בנקודה a

$$\boxed{T_n\left(f(x),a\right) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

דוגמאות:

$$T_n\left(e^x,0\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$T_n\left(\ln(1+x),0\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

$$T_{2k-1}\left(\sin x,0\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} = T_{2k}\left(\sin x,0\right)$$

$$T_{2k}\left(\cos x,0\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = T_{2k+1}\left(\cos x,0\right)$$

$$T_n\left((1+x)^\alpha,0\right)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

(עבור $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0,1,2,\ldots,n$)

<u>נוסחת טיילור עם שארית בצורת לגרנז'</u>

$$\boxed{\begin{gathered}f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\\ \ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.\end{gathered}}$$

<u>אינטגרלים</u>

הצבה	$F'=f,\quad \int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$
לפי חלקים	$\int F(x)dG(x)=F(x)G(x)-\int G(x)dF(x)$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C;\quad \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C;$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C;\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

בהצלחה!!