

סמסטר ב' מועד ג' תשס"ח  
תאריך הבחינה: 23/01/09

בחינה במבוא לאלגברה 2  
המרצה: פרופ' בוריס קוניאבסקי

משך הבחינה: 3 שעות  
אין להשתמש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבון.

חלק א' (60 נק': 30 לכל תשובה מלאה).  
ענה על 2 שאלות מתוך 3 השאלות הבאות.

### שאלה 1

יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד סופי, ותהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית.  
א. לערך עצמי  $\lambda$  של  $T$  הגדר את הריבוי האלגברי ואת הריבוי הגאומטרי שלו. (7 נק').  
ב. הוכח כי אם המטריצה של  $T$  לכסינה, אזי לכל ערך עצמי  $\lambda$  הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי. (10 נק')

ג. תהי  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ . מצא את הריבוי האלגברי והריבוי הגאומטרי של הערך העצמי  $\lambda = -2$  (13 נק')

### שאלה 2

א. הגדר פולינום אופייני ופולינום מינימלי של מטריצה. נסח את משפט קיילי-המילטון. (7 נק')  
ב. הוכח שפולינום אופייני מתחלק לפולינום מינימלי ללא שארית. (10 נק')  
ג. בעזרת משפט קיילי-המילטון, חשב  $B = 3A^3 - 16A^2 + 23A - 2I$  כאשר  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ . (13 נק')

### שאלה 3

א. הגדר את צורת ז'ורדן של מטריצה (7 נק').  
ב. מצא את הפולינום המינימלי של צורת הז'ורדן הבאה:

$$(10 \text{ נק'}) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ג. מצא את כל צורות הז'ורדן של המטריצה  $A$  אם  $m_A(t) = (t-7)^2$ ,  $P_A(t) = (t-7)^5$ . (13 נק')

AAAS - 21

חלק ב' (40 נק': 10 לכל תשובה נכונה)  
ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. סמן את התשובה בצורה ברורה.

#### שאלה 4

אילו מההעתיקות הבאות הן מכפלות פנימיות במרחבים וקטוריים מתאימים:

$$f(u,v) = (uv)(a) \quad (1)$$

$$f(u, v) = \deg(uv) \quad (2)$$

$u, v$  פולינומים ממשיים,  $a$  מספר ממשי.

- א. רק (1)
- ב. רק (2)
- ג. גם (1) וגם (2)
- ד. אף אחת מ-1, 2.

שאלה 5 המטריצות  $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  דומות

- א. לכל  $a, b$
- ב. לכל  $a \neq 3, b \neq 3$
- ג. אם ורק אם  $a = b$
- ד. אף תשובה אינה נכונה

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

#### שאלה 6

מן המטריצות הבאות  
ניתנות ללכסון:

- א. גם  $A$  וגם  $B$
- ב. רק  $A$
- ג. רק  $B$
- ד. אף אחת

#### שאלה 7

תהיה  $A$  המטריצה של מכפלה פנימית על מרחב וקטורי  $V/R$  ממימד אי זוגי  $n$  ביחס לבסיס  $B$ . אזי קיים בסיס  $B'$  של  $V$  כך שביחס ל- $B'$  המטריצה של מכפלה פנימית היא  $-A$ . כן/לא.

#### שאלה 8

אם  $A^2 = A$ , אזי כל הערכים העצמיים של  $A$  שווים ל-0 או 1. כן/לא.

בהצלחה.