אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים
ביה"ס למדעי המתמטיקה

מועד א'
סמסטר א' תשס"ט
13.2.2009

בחינה בחשבון וריאציות (0366.3360)

המרצה: סטיב שוחט

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בחומר עזר חוץ מספרים. אסור להשתמש במחשבי כיס.

ענה על כל 3 השאלות. כל שאלה שוה 42 נקודות. הציון בבחינה הוא הסכום של שני הציונים הגבוהים יותר פלוס חצי מהציון הנמוך ביותר, אך לא יותר ממאה.

תשובה בלי החישובים וההסברים הנדרשים למצוא אותה לא תקבל נקודות.

מותר להשתמש בתוצאות שהוכחו בשיעור מבלי להוכיח אותן בתנאי שאת/ה מצטט/ת אותן בצורה נכונה וברורה.

כדי לקבל מקסימום ניקוד חלקי במקרה של טעות חישובית, תאר/י גם במילים את כל שלבי החישוב.

נא לכתוב בעט בלבד. פתרון לא קריא לא ייבדק.

1. א) עבור הפונקציונל $J[u] := \int_0^b u'^4 + 6u^2u'^2 - 3u^4\,dx$, מצא b_0 גדול ככל שאפשר כך שעבור $0 < b < b_0$ הפתרון למשוואת Euler-Lagrange המקיים $u(0) = 1$ ו- $u(b) = 0$ מעביר את J למינימום מבין כל הפונקציות ב- C^1 המקיימות את תנאיי השפה הנ"ל.
ב) הוכיח שעבור b כנ"ל הפתרון הנ"ל אכן מעביר את J לערך מינימלי מבין הפונקציות הנ"ל.

2. מצא את הפונקציה שמעבירה את $J[u] := \frac{1}{2}\int_0^1 u^2u'^2\,dx$ לערך מינימלי מבין כל הפונקציות הרציפות המקיימות $u(0) = 1$ ו- $u(1) = -1/\sqrt{2}$ שעבורן J מוגדר. נמק.

3. תהי M פונקציה כך ש- $\nabla M \neq 0$ על הקבוצה בה $M = 0$.
נסח והוכיח משפט על תנאים הכרחיים לנקודת מינימום חלקה של פונקציונל $J[\vec{y}] := \int_a^b L(x, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'')\,dx$ מבין פונקציות ב- C^2 המקיימות $\vec{y}(a) = \vec{A}_1$, $\vec{y}'(a) = \vec{A}_2$, $\vec{y}(b) = \vec{B}_1$, $\vec{y}'(b) = \vec{B}_2$, ואת האילוץ $M(\vec{y}') \equiv 0$.

000-4

בהצלחה