

18-1111

הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בחישוב נומרי

0366-2008-01

מרצה: פרופ. ניר סוכן

מועד א

סמסטר ב, תש"ע

2.7.2010

משך הבחינה 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר. ניתן להיעזר במחשב כיס.

בבחינה 5 שאלות. עליכם לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב 25 נקודות.

יש לרשום על טופס המבחן ועל דף הנוסחאות את מספר התלמיד (מספר תעודת הזהות) ולמסור אותו למשגיחות בסוף הבחינה. אין לרשום את שם התלמיד על טופס המבחן!

מספר התלמיד: _____

בהצלחה!

שאלה 1

- א. (5 נק') נתונות הנקודות $(x, f(x))$ הבאות: $(1, 5), (2, 12), (3, 21)$.
 ידוע ש $|f^{(5)}| < 3$, $|f^{(4)}| < 4$, $|f^{(3)}| < 5$.
- נסמן את מעלתו המינימלית של פולינום אינטרפולציה עבור נקודות אלה ב- n .
 מהו n ? מהי שגיאת האינטרפולציה המרבית בקטע $(1, 3)$?
- ב. (10 נק') לשלש הנקודות לעיל נוספו הנקודות $(4, 38), (5, 69)$.
 נסמן את מעלתו המינימלית של פולינום אינטרפולציה עבור כל הנקודות ב- m .
 מהו m ? מהי שגיאת האינטרפולציה המרבית בקטע $(1, 5)$?
- ג. (10 נק') יהיו $l_i(x)$ פולינומי לגרנז' על חמשת הנקודות מסעיפים א ו-ב.
 מהי מעלת הפולינום

$$p(x) = \sum_{i=1}^5 il_i(x)$$

שאלה 2

- נתונים ערכי הפונקציה $f(x)$ בנקודות: $x - \frac{4h}{7}, x, x + \frac{2h}{7}$.
- נסמן את המקסימום של הערך המוחלט של הפונקציה בקטע ב M .
- א. (5 נק') מצאו נוסחת גזירה נומרית עבור $f'(x)$.
- ב. (10 נק') מצאו את החסם המיטבי לשגיאת הנגזרת הנומרית עבור $f'(x)$.
- ג. (10 נק') אם נתון כי שגיאת המחשב היא 10^{-14} , מה צריך להיות גודלו של h כדי שסך הכל השגיאה (שגיאת מחשב + שגיאת הנוסחה) תהיה מינימלית.

שאלה 3

- | x_i | 1 | 3 | 4 | 5 |
|----------|----|-------|-------|-------|
| $f(x_i)$ | -1 | 0.111 | 0.125 | 0.120 |
- נתונות המדידות
- מצא קירוב מהצורה $F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ כך ש $\|F-f\|_2$ יהיה מינימאלי:
- א. (15 נק') בנה מערכת משוואות לקבלת a, b ופתור אותה.
- ב. (10 נק') הראה כיצד ניתן לייעל את התהליך ולקבל מערכת משוואות אלכסונית.

שאלה 4

נתון כלל הטרפז המתוקן $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \frac{f'(a)-f'(b)}{12}(b-a)^2$ (5 נק') מה הסדר השגיאה בכלל הטרפז המתוקן?

עבור כלל הטרפז המורכב נסמן $T_N = h \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(a)+f(b)}{2}$

ב. (10 נק') הוכח את כלל הטרפז המתוקן המורכב $\int_a^b f(x) dx \approx T_N + \frac{f'(a)-f'(b)}{12}h^2 + O(h^4)$

ג. (10 נק') בנה נוסחת אינטגרציה מסדר 4 מהצורה $\int_a^b f(x) dx \approx \alpha T_N + \beta T_{4N} + O(h^4)$ מהם אלפא ובתא ?

שאלה 5

נתונה המד"ר הבאה:

$$py''(x) - qy'(x) + y(x) = 2x$$

עם תנאי שפה: $y(0.25)=y(1)=0$ וכאשר $0 < p, q < 1$ ו $p+q=1$ רוצים למצוא פתרון נומרי לבעיית תנאי שפה זו בקטע $[0.25, 1]$ עם נקודות המרוחקות זו מזו מרחק של 0.25.

א. (3 נק') רשמו קרוב נומרי מסדר $O(h^2)$ למד"ר זה בנקודה x_1 .

ב. (5 נק') רשמו את המערכת הלינארית המתקבלת מהקרוב הנומרי.

ג. (10 נק') מצאו את מטריצת האיטרציה המתאימה לתהליך גאוס-ג'קובי.

ד. (7 נק') מצאו תנאי על p ועל q (אם יש) כך ששיטת גאוס-ג'קובי תתכנס לכל בחירת \vec{y}_0 כלשהו. התחשבו אך ורק בפתרונות ממשיים.