

## מבחן במבוא לאלגברה 2

### מרצה: פרופסור דוד גינזבורג

מועד א' סמסטר ב תש"ע 20.6.2010

יש לענות על כל השאלות.

1. הוכיחו את המשפט הבא: יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{C}$ , ותהי  $T : V \rightarrow V$  העתקה לינארית. הוכיחו כי  $T$  ניתנת ללכסון אם ורק אם הפולינום המינימלי של  $T$  הוא מכפלה של פולינומים לינאריים שונים.
2. (א) הוכיחו כי כל מטריצה  $A$  המוגדרת מעל  $\mathbb{C}$ , ונמצאת בצורת ג'ורדן, היא סכום של שתי מטריצות הפיכות.  
(ב) הוכיחו כי כל מטריצה  $A$  המוגדרת מעל  $\mathbb{C}$  היא סכום של שתי מטריצות הפיכות.
3. (א) תהי  $A \neq 0$  מטריצה מסדר  $2 \times 2$  עם מקדמים ב- $\mathbb{C}$ . נניח כי  $A$  צמודה לעצמה, כלומר  $(A = A^*)$ . הוכיחו כי  $A^2 \neq 0$ .  
(ב) הוכיחו כי לכל  $m$  טבעי, מתקיים  $A^{2^m} \neq 0$ .  
(ג) הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $A^k \neq 0$ .
4. (א) מצאו את כל צורת ג'ורדן האפשריות של העתקה  $T : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$  המקיימת:

$$m_T(x) = x^3, \quad \dim \ker T = 3$$

- (ב) מצאו את כל ערכי  $a, b, c \in \mathbb{C}$  עבורם הפולינום המינימלי של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ & 2 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

הוא  $(x-1)(x-2)$ .

AAAS-28

חברת מס' \_\_\_\_\_  
 סתור \_\_\_\_\_ סחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

103739  
 10-10

107



**הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני הסגנים)**  
**לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:**

1. הנך נדרש לשמור על סודר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המסגרות ולנהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

**הפקולטה למדעים מדויקים**  
**ע"ש ריימונד וברלי סאקלר**

**נבחן תנועה בניגוד להוראות צפוי להמסכת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.**

25

תאריך הבחינה 20/6/10

2. על הנבחן להכחין בחדר שבו הוא רשום.  
 3. אין להחזיק סלפונים ניידים או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל המצוי האישי בצד החדר הרחק מסקום מושבו.



שם הקורס מבוא לאקולוגיה 2  
 שם המורה ד"ר גלית גורן-גורן

4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.



מס' זיהוי  
 (העתק סכרטיס הנבחן/התלמיד)  
 062855531

5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמסגרת.  
 6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמסגרת. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את סחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המסגרת.

100



107

7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה ופיכל את השאלון לידי, לא יאזן רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות מסועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למסגרת את הסחברת ואת השאלון, ויפקל מסגרת את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב כלי לכתוב את הבחינה יחשב כמי שנבחן בסועד זה וציונו יהיה "0".



8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך הסחברת. פרטי הנבחן יסולאו על כריכת הסחברת במסוקם הפועד לכך בלבד.

9. אין לתלוש דפים מהסחברת. טיוטה תיכתב בתוך הסחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.

10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את הסחברת והשאלון ויפקל סיד המסגרת את התעודה המזהה.



לשימוש המורה הבוחן:  
 הציון 100  
 המחברת נבדקה ביום 5/7/10  
 חתימת המורה 2

3022311

הנבחן יחזיר את הסחברת ואת השאלון למסגרת.

בהצלחה.

נראה כי ק"פ  $V$  בסים הנתון  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$  כאשר  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$

[illegible]

$T$  סדר  $i$  (כ  $T_{v_i} = \lambda_i v$ ) ולכן ק'בלנו כ כס  $3N_0$  נה  $-V_i$   $\cdot$   
 הוא למשל  $\sqrt{}$  המרחב העצמי של  $\chi$   $\chi$  ולכן נס  $\chi$  "הו  $\chi$  המלא  $\chi$

נניח  $T$  אבסורב, כלומר קיים  $B$   $\{v_1, \dots, v_n\} = B$

$$\Rightarrow f(T)_{r_i} = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_i) \dots (T - \lambda_k) \cdot \underbrace{(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_k)}_{r_i \text{ ist eigenwert}} \cdot r_i = 0$$

הערה: כל המידע הנ"ל הוא למטרת הדיון בלבד, ואין להשתמש בו לצורכי מסחר.

ה'א' - פריקת המעלה 4. ולכן  $m_T(x) = f(x)$  ואכן  $m_T(x)$  מתפרק לאורמים אינאליים שאינם  $\square$ .

$A = \begin{pmatrix} J_{1 \times 1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k \times k} \end{pmatrix}$

$$B + C = A \quad f_3$$

(כ'לומר ו' אין ע"ע פארן), נאכ'נאכ'ן ב' -1.

$(C_{ij})$   $(B_{ij})$   
 כלל  $C \rightarrow B$  נקרא  $C$  על  $B$ ,  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1/0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$  (נ"ח)  
 כלל  $C$  על  $B$  וכלל  $B$  על  $C$


























































היה  $B_{ij} + C_{ij} = A_{ij}$  זהו המכשור, והוא מכשור מרחב

(כבד רח"ט מהר"י שניידמאן זצ"ל, אגודת ישראל, ח' שבט ה'תרס"ה)

$\beta_{ii} \neq 0, C_{ii} \neq 0$

הארכיון של מנחם מייזן ראובנסון הנאשט שיה יה אלהים ערכים

$B+C=A$        $\Rightarrow$  גורם  $A$        $A-B=C$        $\Rightarrow$  גורם  $C$        $e.e$  /  $N$

(אם ס' יצא ע"ע ולמ' ברך כ' ה' / מ' צדקה ח')                                                            

(אם סוף ע"ז ואם ברך כ' הן מדרגה ח)  
ב- ש ב צ ד ז ח ט י ק ל מ נ ס ע פ צ כו כז כח כט לו לז  
~~לח לה לז לו~~

A B - הפיכוק / אל

②) געלט געהערט צו אונזערע געלט מיטלן. אונזערע געלט מיטלן זענען געלט, און געלט איז אונזערע געלט מיטלן.

~~מחבר~~ משה דוד מלניץ י"ב חור 3/37 כ"ב

הערכים העצמיים נתונים במצב  $M = 1/2$  וזוהי צורה

$$P^{-1}MP = A \iff M = P A P^{-1} \quad -2 \quad \text{קצת יותר פשוט}$$

$A = B + C$  - e קבוצות  $B, C$  נפרדות זו מזו (disjoint)

$$A = \bar{P}^{-1} M P = B + C \quad \xrightarrow{P \mid \bar{P}^{-1} \bar{P} = I} M = P(B+C)\bar{P}^{-1} = P B \bar{P}^{-1} + P C \bar{P}^{-1}$$

$P \subset P^{-1} \rightarrow PBP^{-1}$

נחמא שון מכפרה על מחריצך דפיסא. 



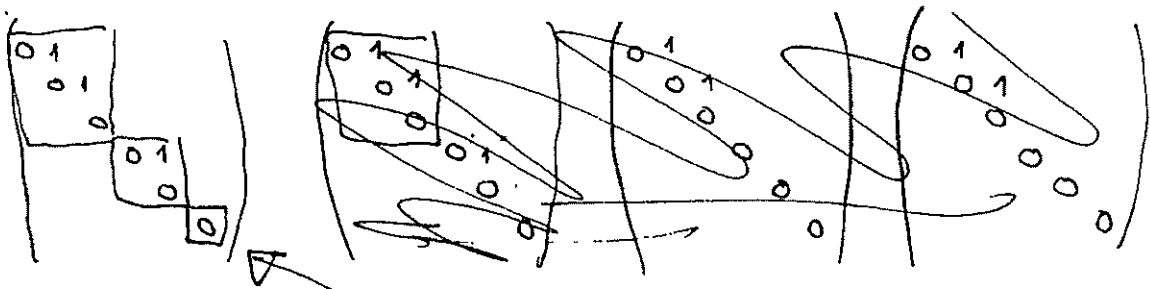
7.11.3  $\dim \ker(T - 0J) = 3$  7.11.4  $\dim \ker T = 3$  <sup>(7)</sup> (4)

מינימל המרחב העצמי של  $\lambda=0$  הוא  $\mathbb{R}$ , כלומר הריבוי העצמי של  $\lambda=0$  הוא 1.

על 0 ב/א/3. וזה נשאר הבלתי ידוע  
(ע"פ דברי ר' חייא)

הצורה הכללית. כן  $m_T(x) = x^3$   $\Leftarrow$   $\Delta_T(x) = x^6$  כל

זאפא'נאם האלעזר ווערנינגאט הארם בארג'ס (c) - פארקאם, וועלמא



151 צור ב'ורצן הימדה הארבעה על T (כאן) 38 כ' צור ב'ורצן.

$$\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -a & -b \\ & x-2 & -c \\ & & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-1)$$

$(A-\lambda)(A-1)=0$  - 2 roots  $\lambda=1$  and  $\lambda=0$   $m_T(x)=(x-\lambda)(x-1)$  - 2 roots  $\lambda=1$  and  $\lambda=0$

אז  $(\beta/\alpha) \cdot 0 = \alpha \cdot c$      $\mu_2 |$      $0 = \alpha$      $\perp$      $\mu$  ש"מ

318  $\alpha=0$  כי  $b, c$  מסוימים  $+k$  והעקב

2.2N-2H1W012JIN 衣

אין אונזערע ארבעטן

2124-2130 54

2.2N-ג 1100121N 5A

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

U.S. 12.5IN 54x

$$(x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$$

$$A^m = (A^2)^m = 0 \Rightarrow A^2$$

$$A^2 = B$$

$$\Rightarrow (B)^m \neq 0$$

$$A^{2m} = (A^2)^m = \underbrace{A^2 \cdot A^2 \cdot \dots \cdot A^2}_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \Rightarrow a, d \quad b = \bar{c}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + |b|^2 & \\ \bar{b}a + d\bar{b} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ab + b\bar{d} & \\ |b|^2 + d^2 & \end{pmatrix} = A^2$$

$$a^2 + b\bar{b}$$

$$b\bar{b} + d^2$$

אם  $b \neq 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

אם  $b = 0$  אז  $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$  וזה לא 0 כי  $a \neq 0$  או  $d \neq 0$

אם  $b = 0$

$$A^2 = 0$$

$$A^2 = A^2$$

אם  $A^2 = 0$  אז  $A = 0$

$$A^2 = \frac{a^2 + b\bar{b}}{a\bar{b} + b\bar{d}} \frac{\bar{a} + \bar{b}\bar{d}}{d^2 + b\bar{b}}$$

$$A^4 = (A^2)^2$$

$$(C, C, C)$$

$$A^2 \neq 0$$

$$A^2 \neq 0$$

$$A = \bar{A}^t$$

$$(A^2)^4 = (A^2)^8$$

אם  $a \neq 0$

$$a \neq 0$$

אם  $a = 0$

$$a = 0$$

אם  $b \neq 0$

$$0 \neq \dots A^2, A^4, A^6$$



