

מס' מחברת: _____

ת.ז: _____

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123**סמסטר ב' תשע"ב, מועד ב'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'**

- משך הבחינה שלוש שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוני.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל ארבע מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות; פתרון מלא של כל חמש השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלות מספריות.
- לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

שאלה 1:יהיו $n \geq 1$ שלמים. הוכיחו:

$$\binom{n}{r} 2^r 3^{n-r} = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} 2^k$$

שאלה 2:

תהי A קבוצה של 9 מספרים שלמים חיוביים שונים בה כל מספר אינו מתחלק בראשוני גדול מ-5. הראו כי A מכילה שני מספרים אשר מכפלתם היא ריבוע שלם.

שאלה 3:הוכיחו כי קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$e^{n+2011} < \sum_{k=2012}^n 2^k \binom{n}{k} < \pi^{n-2013}$$

שאלה 4:

פלג מטיל קובייה בעלת 6 פאות עליהן רשומים מספרים 1, ..., 6. מה הסיכוי כי ב- n הטלות הקובייה לעולם לא יופיעו שני מספרים זוגיים ברצף?

שאלה 5:

יהי G גרף בו קיימים בדיוק שני קדקודים x, y בעלי דרגה אי-זוגית, והם לא מחוברים בצלע. נגדיר $G' = G + (x, y)$. הוכח: G קשיר אם ורק אם G' קשיר.

בהצלחה!

CC-9