66 3/3 שאלינתפרין

בחינה במבוא לאלגברה 1
המרצה: פרופסור דוד לוין

סמסטר א' מועד א' תש"ע
תאריך הבחינה: 26.1.2010

<u>ענה על 4 שאלות בלבד</u>
משך הבחינה 3 שעות
אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
<u>לתשומת לב</u>: יש לנמק כל פתרון, תוך ציון המשפטים בהם השתמשת!

<u>שאלה 1</u>

א. הוכח כי אם $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$ וכן $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

אז קיים פתרון למערכת $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$.

ב. האם קיים c ממשי כך שקיים פתרון למערכת $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + cx_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = c \end{cases}$?

<u>שאלה 2</u>

א. יהיו U,V מרחבים וקטוריים בעלי אותו מימד (סופי), ותהא T העתקה ליניארית, $T : V \to U$. הראה כי אם ל- T הופכית משמאל אז יש לה גם הופכית מימין.

ב. יהיו $V = U = R^4$, ונתון כי העתקה ליניארית T מקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

האם הנתונים האלה מגדירים את T על כל V ? והאם T איזומטריה ?

AAAS-24

בחינה במבוא לאלגברה 1 | סמסטר א' מועד א' תש"ע

המרצה: פרופסור דוד לוין | תאריך הבחינה: 26.1.2010

<u>שאלה 3</u>

א. תהא A מטריצה ממשית עם m שורות ו- n עמודות, $m > n$. הראה כי המטריצה AA^T אינה הפיכה. (המכפלה של המטריצה A במוחלפת שלה).

ב. תהא A מטריצה ריבועית. אם $|A| = 0$ מצא מהי המטריצה A(adj(A))? (המכפלה של המטריצה A במטריצה adj(A)).

<u>שאלה 4</u>

א. הוכח כי אם V מרחב ליניארי בעל מימד סופי אזי כל הבסיסים של V הם בעלי אותו מספר אברים.

ב. במרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה 4, הראה שכל פולינום ניתן להצגה יחידה בקומבינציה ליניארית של

$$\{1,(x-a),(x-a)^2,(x-a)^3,(x-a)^4\}$$

ומצא את מקדמי ההצגה.

<u>שאלה 5</u>

א. במרחב המטריצות הממשי $R_{2,3}$, נתון תת- המרחב

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ -a & b & -a \end{pmatrix} \mid a,b \in R \right\}$$

מצא תת-מרחב $W \subseteq R_{2,3}$ כך ש $U \oplus W = R_{2,3}$.

ב. (בונוס- לא חובה)

האם קיים תת מרחב אחר, $V \neq W$, $V \subseteq R_{2,3}$ כך ש $U \oplus V = R_{2,3}$? נמקו

בהצלחה!!!

מחברת מס' 1
מתוך 2 מחברות

126

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

תאריך הבחינה 26/01/10

שם הקורס מבוא לאלגברה 1

שם המורה פרופ' דב לוין

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **סלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	93
המחברת נבדקה ביום	2/2
חתימת המורה	

3017350

שאלה ב

א) נניח T העתקה לינארית $T: V \to V$.

נניח גם כי ל-T הפכי משמאל $S: V \to V$

לכן $(S \circ T)(v) = v$ כלומר $S(T(v)) = v$.

טענה: T חח"ע

נניח בשלילה T אינה חח"ע, לכן קיימים $v_1, v_2 \in V$ כך ש

$v_1 \neq v_2$ ו $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow S(T(v_1)) = S(T(v_2))$

וזאת סתירה לטענה ש S הפכית משמאל (כי $S(T(v_1)) = v_1 \neq v_2 = S(T(v_2))$)

טענה: T חח"ע $\Rightarrow \ker T = \{0\}$

מכיוון ש T לינארית אזי $T(0) = 0$, ומכיוון שהיא חח"ע לכן המקור היחיד לתמונה 0.

ע"פ נוסחת המימד $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}T) + \underbrace{\ker(\mathrm{Im}T)}_{0}$

$\Rightarrow \dim(V) = \dim(\mathrm{Im}T) \Rightarrow$ T על כי $\dim(V) = \dim(U) = \dim(\mathrm{Im}T)$

לכן לכל איבר בטווח יש מקור.

מכיוון ש T חח"ע ועל אז היא איזומורפיזם, לאיזומורפיזם יש הפכית מימין ומשמאל. מ.ש.ל.

ב) נבדוק אי תלות של וקטורי המקור בשאלה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות שאפשר לדרג לזהות לכן הוקטורים בת"ל

מכיוון ~~ש~~ שקבוצת וקטורי המקור מהווים בסיס
למרחב המוצא $\mathbb{R}^4$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \rightarrow$$ בסיס ל-$\mathbb{R}^4$

אזי וקטורי התמונה שלהם הם בסיס ל-$\mathrm{Im}\,T$.
נבדוק אי תלות של וקטורי התמונה.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

ניתן לראות שהשורה ה-3 וה-4 מאפסות אחת את השניה ולכן הוקטורים תלויים לינארית ולכן בסיס ל-$\mathrm{Im}\,T$ מכיל פחות מ-4 וקטורים ולכן לא פורש את $\mathbb{R}^4$ (כי מימדו קטן מ-4) ולכן T אינה על $\Leftarrow$ היא אינה איזומורפיזם.

$$\cancel{\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1+1=0}$$

תיקון לסעיף הראשון: $T:V\to U$

ניתן לדעת לאן T וקטור מ-V יועתק על פי נתוני השאלה מכיוון שוקטורי המקור השאלה הם בסיס ל-$\mathbb{R}^4$ ולכן כל $v\in V$ ניתן להציג כצירוף לינארי של וקטורים אלה, כלומר לכל $v\in V$ מתקיים

$$V=a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+D\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T(V)=a\cdot T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+B\,T\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C\,T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+D\cdot T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

כי T העתקה לינארית אז מתקיים

$$T(av+u)=aT(v)+T(u)$$

kGl'C

$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$

$Adj = |A| \cdot A^{-1} = \frac{1}{A^{-1}} \cdot Adj_{A^{-1}}$

I

1 2 3

1 1 1

2 3 4

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$1 - 4 + 3$

$A^{-1} = Adj\,A \cdot \frac{1}{|A|}$

$|A| \cdot$

$A \cdot Ad(A) = A^{-1} |A|$

שאלה 3:

(א)

$$A=\overbrace{\begin{pmatrix} \text{—} \\ \text{—} \end{pmatrix}}^{n}\Big\}m$$

נתבונן במכפלה $A\cdot A^T$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} \text{—} \\ \text{—} \end{pmatrix}}_{m,n}\underset{A^T}{\begin{pmatrix} | & | \end{pmatrix}}_{n,m}=\underset{A\cdot A^T}{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}}_{m,m}$$

~~מרחב השורות של A = מרחב העמודות~~

~~מרחב השורות של $A\cdot A^T$~~

~~מרחב העמודות של $A\cdot A^T$ נפרש ע"י עמודות A~~

מרחב השורות של $A\cdot A^T$ נפרש ע"י עמודות A^T

מכיוון שב A^T m ~~שורות~~ עמודות ו n שורות,

ומכיוון שמרחב העמודות שווה למרחב השורות שהוא לכל היותר n, העמודות של A^T תלויות לינארית אחת בשניה $\Rightarrow$ שורות $A\cdot A^T$ תלויות לינארית אחת בשניה $\Rightarrow$ ניתן יהיה לאפס שורה אחת באמצעות השורות האחרות $\Rightarrow |A\cdot A^T|=0 \Rightarrow$ היא אינה הפיכה.

(ב) ~~$|A|\neq 0 \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A) \Leftarrow \frac{1}{|A|}Adj(A)$~~

$|A|=0 \Leftarrow$ יש שורה/עמודה שתלויה לינארית בעמודות/שורות האחרות. $A(adj(A))$ היא מטריצת האפס.

ט $\quad Adj(A)=|A|\cdot A^{-1}$ זה לא שוויון חוקי כי A^{-1} לא קיימת

$$\Rightarrow A\cdot A^{-1}\cdot|A| = I\cdot 0 = 0$$

שאלה 4

(א) ע"פ משפט אם $\{v_1 .. v_n\}$ קבוצה פורשת של V
אזי לכל קבוצה בת"ל $\{v_1 .. v_m\}$ מתקיים $m \le n$
נניח $\{v_1 .. v_n\}$ בסיס ל-V ו $\{v_1 .. v_k\}$ בסיס ל-V
מכיוון שבסיס הוא קבוצה פורשת ובת"ל מתקיים
$n \le k$ וגם $k \le n \Leftarrow$ $k=n$ כלומר
הם בעלי אותו מספר איברים.

נוכיח את המשפט ה-I: נניח $\{v_1..v_n\}$ פורשת את V ו-$\{w_1..w_m\}$ קבוצה בת"ל ב-V. ~~~~ הקבוצה $\{w_1, v_1..v_n\}$ תלויה לינארית כי $w_1 = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n$ לכן קיים וקטור v_i שהקבוצה שלפני לינארית מקודמיו. נשמיט וקטור זה מהקבוצה, ונעביר את w_2 לקבוצה החדשה $\{w_1, w_2, v_1 .. v_{i-1}, v_{i+1} .. v_n\}$ זאת הקבוצה תלויה כי ניתן להביע את w_2 שמצרופות הוקטורים האחרים. נמשיך בתהליך זה, ונשמיט עוד v מהקבוצה. ברור שכל הקבוצה החדשה היא קבוצה פורשת ולכן, אם אחרי העברת n איברים של $\{w_1 .. w_m\}$ נקבל קבוצה $\{w_1 .. w_n\}$ שהיא פורשת את V, ולכן אם נעביר אליה את w_{n+1} היא תהיה תלויה לינארית בסתירה להנחה.

(ב) הבסיס הסטנדרטי של מרחב הפולינומים ממעלה 4 הוא $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ נראה כי כל פולינום $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+ax+a_0$ ניתן לייצג בבסיס

$$\{1,\ x-a,\ x^2-2a+a,\ x^3-3ax^2+3xa^2-a^3,\ x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4\}$$

$$B\cdot 1 + C(x-a) + D(x^2-2ax+a^2) + E(x-a)^3 + F(x-a)^4 = a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a^2 & -2aX & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ a^3 & 3a^2 & 3a & 1 & 0 & a_3 \\ a^4 & -4a^3 & 6a^2 & -4a & 1 & a_4 \end{array}\right)$$

IlcCl'C

$x^4 + a^3$

$[\quad]^{ST}_{B}$

a

$3x^2 - 6ax + 3a^2$

$\parallel$

$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 + 3a(x-a)^2 =$

$\cancel{x^3 + 3a^2x - a^3 - 6ax + 3a^2}$

$\cancel{x^3 + (3a^2 - 6a)x - a^3 + 3a^2 + (a - 3a^2)(x-a) =}$

$\cancel{x^3 - a^3 + 3a^2 - 6a^2 + 3a^2 = x^3 - a^3 - a^3(1) = x^3}$

$x^3 - \cancel{3ax^2} + 3a^2x - a^3 + \cancel{3ax^2} - 3a^2x + 3a^3$

x^3

$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 + 3ax^2 - 6a^2x + 3a^3$

$x^3 - 3a^2x - 2a^3 + 3a^2(x-a) =$

$x^3 - 3a^2x - 2a^3 + \cancel{3a^2x} + 3a^3$

$x^3 + a^3 - 1 \cdot a^3$

$x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4$

$+4ax^3 - 12a^2x^2 + 12a^3x - 4a^4 =$

$x^4 - 6a^2x^2 + 8a^3x - 3a^4 + 6a^2(x-a)^2 =$

$x^4 - \cancel{6a^2x^2} + 8a^3x - 3a^4 + \cancel{6a^2x^2} - 12a^3x + 6a^4 =$

$x^4 + \cancel{8a^2x} - 4a^3x + 3a^4 + 4a^3(x-a) =$

$x^4 - \cancel{4a^3x} + 3a^4 + \cancel{4a^3x} - 4a^4 =$

$x^4 - a^4 + a^4 \cdot 1$

נבדוק את הייצוג של G וקטור מהבסיס האופייני בבסיס הנדרש!

$1 = 1$ ✓

$x = a \cdot 1 + x - a = x$ ✓

$x^2 = (x-a)^2 + 2a(x-a) + a^2 \cdot 1 = x^2 - \cancel{2ax} + \cancel{a^2} + \cancel{2ax} - \cancel{2a^2} + \cancel{a^2} = x^2$

$\cancel{x^3 = (x-a)^3 + 3(x-a)^2 + (6a-3a^2)(x-a) - a^3}$

$\cancel{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - 3x^2}$

$x^3 = (x-a)^3 + 3a(x-a)^2 + a^3 \cdot 1 + 3a^2(x-a) =$

$\cancel{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 + 3ax^2 - 6}$

$x^3 - \cancel{3ax^2} + \cancel{3a^2x} - a^3 + \cancel{3ax^2} - \cancel{6a^2x} + 3a^3 + a^3 + \cancel{3a^2x} - 3a^3$

$= x^3$ ✓

$x^4 = (x-a)^4 + 4a(x-a)^3 + 6a^2(x-a)^2 + 4a^3(x-a) + a^4 \cdot 1$ ✓

לכן G וקטור מבסיס הסטנדרטי ניתן להצג כצירוף לינארי מבסיס החדש, ומכיוון שכל וקטור במרחב הפולינומים ממעלה 4 הוא צ"ל של וקטורי הבסיס הסטנדרטי, ניתן יהיה לייצג אותו גם במרחב החדש.

לכן מקדמי ההצגה הם:

$$\begin{bmatrix} a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \\ 4a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \\ 6a^2 + 3a + 1 \\ 4a + 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓

טיוטה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & d \\ 1 & 0 & e \\ -1 & 0 & f \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a+c \\ 0 & 0 & c-a-c \\ 0 & 0 & d-a-c \\ 0 & 0 & e+b \\ 0 & 0 & f+a \end{array}\right)$$

$c-a-c=0$

$\boxed{a=0}$

$d-c=0$ $\quad$ $d-c-e-d=0$

$e+d=0$ $\quad$ $c=-e$

$f+a=0 \Rightarrow \boxed{F=0}$

$d+e=0$

$e+d=0$

$c=1 \Rightarrow e=-1 \Rightarrow d=1$

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2:

בסיס למרחב U הוא: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

נחפש תת מרחב זר למרחב זה:

נראה כי W הוא תת מרחב של $R_{2,3}$

מרחב זה צריך להיות ממימד 4 כי עפ"י נוסחאת המימד

$$\underbrace{\dim(R_{2,3})}_{6} = \underbrace{\dim U}_{2} + \dim W \Rightarrow W = 4$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+a & d \\ a & c+d & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

קל לראות כי 0 שייך למרחב, ומתקיים סגירות לגבי כפל בסקלר. לגבי חיבור:

$$w+w' = \begin{pmatrix} a+a' & (b+b')+(a+a') & d+d' \\ a+a' & (c+c')+(d+d') & d+d' \end{pmatrix} \leftarrow$$

סגירות לגבי ~~כפל~~ חיבור

$\Leftarrow$ הוא תת מרחב

ניתן לראות כי החיתוך של שני המרחבים הוא 0, ולכן

$$U \oplus W = R_{2,3}$$

כי $\underbrace{\dim U}_{2} + \underbrace{\dim W}_{4} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{0} = 6$

שאלה 1

נתבונן במטריצה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

פתרון המטריצה הווה מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות.

אם הדטרמיננטה של המטריצה$=0$ $\Leftarrow$ יש אינסוף פתרונות

~~[illegible]~~ אין פתרון.

כדי שלא יהיה פתרון למערכת נצטרך להביע לדירוג בו

$\text{Rank } \tilde{A} < \text{rank } \tilde{A|B}$

מכיוון ש $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftarrow a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \neq 0$

$a_{11}\cdot a_{22} \neq a_{12}\cdot a_{21}$

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 & \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21}-a_{11}\cdot a_{22} & a_{22}\cdot a_{12} & b_2-a_{22}b_1 \end{array}\right)}$$

טיוטה

ב

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & c & 0 \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix} = c^2 - 2c + 3(3-c) = c^2 - 5c + 9 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-36}}{2} \rightarrow$$ לא קיים ממשי

לכן לא קיים c ממשי שהוא פתרון למערכת.

טיוטה

אוניברסיטת בר-אילן
אוניברסיטת בר-אילן
אוניברסיטת בר-אילן

מחברת מס' 2 מתוך 2 מחברות

126

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

תאריך הבחינה 26/1/10

שם הקורס מבוא לאלגברה 1

שם המורה דוד לוין

3017345

לשימוש המורה הבוחן:

הציון ______

המחברת נבדקה ביום ______

חתימת המורה ______

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק מסקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר,יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

תאריך הבחינה 26/1/10

שם הקורס מבוא לאלגברה 1

שם המורה דוד לוין

שם התלמיד [משפחה] ריקה [פרטי] גיל

3017345

שאלה 1:

כדי שלמערכת לא יהיה פתרון אנו צריכים להגיע לדירוג של שורת סתירה $rank A < rank A|B$.

כלומר שאחרי דירוג:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & g \end{array}\right)$$