

17 | 06 | 11

0366-3117

spring 2010/11

תשע"א סמסטר ב'

בחינה בהצגות של חבורות סופיות  
פרופ' א. בן-ארצי

יש לענות על 4 (ולא יותר) מתוך 6 השאלות הבאות. ערך כל שאלה 25 נקודות. משך הבחינה: 3 שעות. יש להוכיח את התשובות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו לרבות מחשבוניס.

סימונים: שדה מרוכבים מסומן ב  $\mathbb{C}$ .  $S_n$  היא חבורת התמורות על הקבוצה  $\{1, \dots, n\}$ . ההצגה הטרייאלית ממימד אחד מסומנת ב 1. כל החבורות הן סופיות, וכל ההצגות הן ממימד סופי מעל שדה המרוכבים. אם  $\tau : G \rightarrow GL(U)$  הצגה של חבורה  $G$  מסמנים  $U^G = \{u \in U : \tau(g)u = u \ (\forall g \in G)\}$ . אלגברת החבורה של חבורה  $G$  מסומנת ע"י  $S(G)$ , זוהי האלגברה של הפונקציות המרוכבות על  $G$  עם מכפלת הקובנבולוציה.

1. לתאר את טבלת הכרקטרים של החבורה  $A_4 = \{\sigma \in S_4 : \text{sign}(\sigma) = 1\}$  (חבורת התמורות הזוגיות על קבוצה בת ארבע איברים).

2. תהי  $\tau : G \rightarrow GL(U)$  הצגה. להוכיח ש  $\dim_{\mathbb{C}}(U^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\tau}(g)$ .

3. לנסח ולהוכיח את משפט משקה.

4. תהי  $\pi$  הצגה אי-פריקה של חבורה סופית  $G$  ונסמן ב  $\chi = \chi_{\pi}$  את הכרקטר שלה. להוכיח שמתקיימת המשוואה הפונקציונלית הבאה

$$\chi(x)\chi(y) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{z \in G} \chi(yzxz^{-1})$$

5. תהי  $G$  חבורה סופית,  $H \subset G$  תת-חבורה,  $\sigma$  הצגה של  $H$ , ו  $\rho$  הצגה של  $G$ . להוכיח ש

$$\text{Ind}_H^G(\sigma \otimes (\rho|_H)) \sim (\text{Ind}_H^G \sigma) \otimes \rho$$

6. תהי  $G$  חבורה סופית, ו  $f \in S(G)$  איבר באלגברת החבורה של  $G$ . להראות ש  $f$  פונצית מחלקה (קבועה על מחלקות השקילות של  $G$ ) אם ורק אם לכל הצגה אי-פריקה  $\pi$  של  $G$ ,  $\pi(f) = \sum_{g \in G} f(g)\pi(g)$  סקלרית, כלומר קיים  $\lambda_{\pi} \in \mathbb{C}$  כך ש  $\sum_{g \in G} f(g)\pi(g) = \lambda_{\pi} I_{V_{\pi}}$ .

בהצלחה!

AAA-6