

סמסטר ב', מועד ב', תשס"ט  
תאריך הבחינה: 02.09.2009  
מספר קורס: 0366-3022

בחינה במבוא לאנליזה פונקציונלית  
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

---

---

שאלה 1

הוכחו או הפרכו:  
(א) לכל  $f \in L_2(\mathbb{R})$ ,

$$\|f - f * \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}\| \rightarrow 0 \text{ כאשר } \varepsilon \rightarrow 0 +.$$

.....  
(ב)

$$\sup_{f: \|f\| \leq 1} \|f - f * \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}\| \rightarrow 0 \text{ כאשר } \varepsilon \rightarrow 0 +.$$

---

---

שאלה 2

הוכחו או הפרכו:

(א) לכל  $f \in L_2(\mathbb{R})$  קיימת אחת ורק אחת  $g \in L_2(\mathbb{R})$  כך ש-

$$3g(x) - g(x-1) - g(x+2) = f(x)$$

כמעט לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

.....  
(ב) לכל  $f \in L_2(\mathbb{R})$  קיימת אחת ורק אחת  $g \in L_2(\mathbb{R})$  כך ש-

$$g(x+1) - g(x) = f(x)$$

כמעט לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

רמז: התמרת פוריה.

### שאלה 3

יהי  $A$  אופרטור סגור סימטרי, ו- $B$  אופרטור צמוד לעצמו. הוכחו או הפרכו:  
(א) אם  $A$  מרחיב את  $B$  אז  $A = B$ .

.....  
(ב) אם  $B$  מרחיב את  $A$  אז  $A = B$ .

---



---

### שאלה 4

הוכחו או הפרכו:  
(א) הגבול

$$T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \left( x \mapsto \frac{1}{x} \right) \cdot \mathbb{1}_{(\varepsilon, 1)} + (\ln \varepsilon) \cdot \delta_0 \right)$$

קיים ב- $D'_1(-1, 1)$ .

.....  
(ב) הגבול  $T$  קיים, ומקיים

$$(x \mapsto x) \cdot T = \mathbb{1}_{(0, 1)}.$$


---



---