26/08/11

0366-3117

תשע"א סמסטר ב' spring 2010/11

בחינה בהצגות של חבורות סופיות

פרופ' א. בן-ארצי

יש לענות על 4 (ולא יותר) מתוך 6 השאלות הבאות. ערך כל שאלה 25 נקודות. משך הבחינה: 3 שעות. יש להוכיח את התשובות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו לרבות מחשבונים.

סימונים: שדה מרוכבים מסומן ב $\mathbb{C}$. S_n היא חבורת התמורות על הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$. ההצגה הטריויאלית ממימד אחד מסומנת ב 1. כל החבורות הן סופיות, וכל ההצגות הן ממימד סופי מעל שדה המרוכבים. אם $\tau : G \to GL(U)$ הצגה של חבורה G מסמנים $U^G = \{u \in U : \tau(g)u = u\ (\forall g \in G)\ \}$. אלגברת החבורה של חבורה G מסומנת ע"י $S(G)$, זוהי האלגברה של הפונקציות המרוכבות על G עם מכפלת הקובנבולוציה.

1. לתאר את טבלת הכרקטרים של החבורה S_4 ואת ההצגות המתאימות.

2. תהי ρ הצגה של G ו $H \subset G$ תת-חבורה. נסמן ב λ את ההצגה הקנונית של G על מרחב הפונקציות המרוכבות על G/H, כלומר λ נתונה על ידי $(\lambda(g)f)(g_0H) = f(g^{-1}g_0H)$ $(g, g_0 \in G)$. להוכיח ש $\mathrm{Ind}_H^G(\rho|_H) = \lambda \otimes \rho$.

3. תהיינה ρ ו τ הצגות של חבורה G. להוכיח ש τ שקולה לתת-הצגה של ρ אם ורק אם τ שקולה להצגת מנה של ρ.

4. G חבורה סופית. לכל $\pi \in \widehat{G}$ נסמן ב $U(\pi) \in S(G)$ את מרחב המקדמים של π. להוכיח שההטלה P במרחב $S(G)$ על מרחב המקדמים $U(\pi)$, לאורך שאר מרחבי המקדמים, נתונה על ידי

$$Pf = \frac{\chi_\pi(1)}{|G|}\chi_\pi * f \qquad (f \in S(G))$$

5. תהי G חבורה סופית, $H \subset G$ תת-חבורה, σ הצגה של H, ו η הצגה של G. להוכיח שקיים איזומורפיזם של מרחבים וקטורים

$$\mathrm{Hom}_G(\eta, \mathrm{Ind}_H^G \sigma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\eta|_H, \sigma)$$

6. תהי G חבורה סופית הפועלת בצורה בי-טרנזיטיבית על קבוצה X (כלומר אם $x_1 \neq x_2$ ו $y_1 \neq y_2$ הם איברים ב X אז קיים $g \in G$ כך ש $g\cdot x_1 = y_1$ ו $g \cdot x_2 = y_2$). להוכיח שלהצגה המתקבלת על מרחב הפונקציות המרוכבות על X יש בדיוק שני מרכיבים אי-פריקים בריבוי 1 כל אחד. כאן מניחים ש X מונה לפחות שני איברים: $|X| \geq 2$.

בהצלחה!

AAAO-5