0366-1105

מבוא לתורת הקבוצות , 2011
מבחן מסכם, סמסטר א', מועד א'
מרצה: אלי גלזנר

13/02/11

- משך הבחינה – 3 שעות.
- אין להשתמש בחומרי עזר.

חלק I (40%): ענו על **אחת** מתוך שתי השאלות הבאות עם פירוט מלא.

1. הוכיחו:

א.(ישירות) לכל שלושה סודרים α,β,γ מתקיים: $\beta<\gamma \Rightarrow \alpha+\beta<\alpha+\gamma$.

ב.(אינדוקציה טרנספיניטית) לכל שני סודרים $\alpha,\beta>1$ מתקיים $\alpha^\beta \geq \beta$ (ניתן להשתמש בטענה הבאה מבלי להוכיח אותה: לכל שלושה סודרים κ,λ,μ מתקיים: $\lambda<\mu \Rightarrow \kappa\cdot\lambda<\kappa\cdot\mu$). תנו דוגמא לסודרים אינסופיים α,β עבורם מתקיים $\alpha^\beta=\beta$.

2. נסחו והוכיחו את משפט קנטור-ברנשטיין.

חלק II: ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות (20% כל אחת). הסבירו את תשובותיכם.

3. נסמן ב- ω,ω_1,ω_2 את שלושת הסודרים האינסופיים הפותחים הראשונים (כלומר שלושת הסודרים המונים האינסופיים הראשונים). סדרו את הסודרים הבאים ע"פ גודלם (ציינו גם שויונים):

$$2\cdot\omega_1+\omega\cdot 3+3,\ \ \omega\cdot 3+\omega_1+3,\ \ \omega_1^{\omega_2}+\omega_2+\omega_1,\ \ \omega_1\cdot\omega_2$$

4. הוכיחו ישירות (הראו פונקציה חח"ע ועל מפורשת) או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\{0,1\}^{\mathrm{N}} \sim \{0,1\}^{\mathrm{N}} \times \{0,1\}^{\mathrm{N}}$

ב. יהי M אוסף כל המספרים הממשיים שהם שורשים של משוואות מהצורה $ax^2+bx+c=0$, כאשר a,b,c שלמים. יהי $K=\{s\cdot m+t : s,t\in \mathrm{Q}, m\in M\}$. אזי $K\sim \mathrm{R}$.

5. הסבירו איך ניתן להסיק את אקסיומת הבחירה מתוך עקרון המקסימאליות של האוסדורף. (נסחו במדויק את שניהם)

6.א. הסבירו כיצד ניתן להתייחס ל- R^{R} כתת-קבוצה של $P(\mathrm{R})$.

ב. הוכיחו בעזרת משפט קנטור-ברנשטיין ש- $|P(\mathrm{R})|=|\mathrm{R}^{\mathrm{R}}|$.

ג. האם לכל קבוצה $X\neq\phi$ אינסופית מתקיים $|P(X)|=|X^X|$? אם אתם משתמשים באקסיומת הבחירה הסבירו במדויק כיצד.

בהצלחה

AAAC-37