

# **בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123**

סמסטר ב' תשס"ח, מועד א'  
**המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'**

- משך הבחינה שלוש שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 20 נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלות מספריות.
- לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולמיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

**מס' סטודנט:**

03661123011

57



**שאלה 1:**

הוכח: לכל  $n \geq m \geq 1$  שלמים קיים:

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

**שאלה 2:**

תהי  $A$  קבוצה של  $n+1$  מספרים שלמים שונים בין  $1$  ל-  $3n$ .

הוכח:  $A$  מכילה שני איברים  $a_i, a_j$  כך ש-  $n \leq a_i - a_j \leq 2n$ .

**שאלה 3:**

שלושה אנרכיסטים בוחרים גרביים מתוך מגירה עם שלושה זוגות גרביים. בכמה דרכים הם יוכלו לבחור גרביים כך שכל אחד בוחר שתי גרביים ואף אחד לא בוחר בזוג תואם?

**שאלה 4:**

מדד בורסת ניירות ערך עולה מדי שנה, כאשר בכל שנה העליה הכוללת במהלך השנה כפולה מזו של השנה הקודמת. מצא את ערך המדד אחרי  $n$  שנים, כאשר ערכו בסוף השנה הראשונה והשניה הוא  $1$  ו-  $4$ , בהתאמה.

**שאלה 5:**

בכמה אופנים ניתן להרכיב סלסלה של 12 פירות מהפירות פסיפלורה, ליצי, מנגו ואקמנית, כאשר מספר הפירות מכל סוג בסלסלה אינו עולה על 4?

בהצלחה!

CC-5

3/96

# פתרון שאלה 1

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

3. ריק, סדר  $n$  בקורים ~~שונים~~  $3$ -איים באים בק

✓ סדרה הראשון יהיו בקים  $m$  בקורים.

קובץ I - סדר  $m$  מקום ה-ה זיהו ברא הראשון ואלו

✓ נבאר  $n-m$  הבקורים לתק \* בק. שני האיים -  $\binom{n}{m} 2^{n-m}$ .

קובץ II - סדר  $n-m$  מקום ה-ה - סדר  $m$  מקום ה-ה

בקורים. יהיו בקים הראשון הראשון ואלו הבקורים

יהיו ברא השני (השני) ומקום  $m$  בקורים ברא הראשון

( $n-m$  אולי השני) כל סדרה של  $n-m$  אולי

✓ בקורים  $2$ -איים הראשון יהיו ~~שני~~ סדרה אחת בקורים

אחר יהיו לוי שלם של בקורים ברא השני (השני)

ובנוסף כל סדרה של  $m \leq k \leq n$  תהיה "קובץ"

סדרה כיוון, סדרה  $3, 2$  יסוד סדרה כל כיוון

✓ הבקורים וברא הראשון:  $n-m$  סדר  $m$  בקורים.

20

## פתרון שאלה 2

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} \leq 3n-2 \quad p_2 \quad A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} - \text{w.o.}$$

10. Wskn. A-D:  $b_1, b_2, \dots, b_{n+1} = 1$

בהתאמה, נניח כי  $\mathcal{A}$  הוא אלמנט של  $\mathcal{A}$  ו- $\mathcal{B}$  הוא אלמנט של  $\mathcal{B}$ .

מספרים -  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  - נקראים מספרים מודולו  $n$ .

Page 11770 550- 1512215 0-1 862 ~~11770~~ ~~11770~~

$(i \neq j) \quad b_i = b_j \quad \text{— 2-ns 'on 2 obj' — } p_j r_n$

~~5.  $a_1 = kx + b$~~   $a_1 = kx + b$ :  $-e$ ,  $p \geq 0$ ,  $k$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $x^N$ ,  $p$   $-5k1$  ~~5.  $a_1 = kx + b$~~

$$(a_i > a_j \text{ and } n \rightarrow \infty) \Rightarrow a_i - a_j = kn - \ln n = (k-1)\ln n \Rightarrow a_j = \ln n + b_j$$

ימים 28 כי ההפרה חלשה בקצב 10%

מכאן  $2 \leq n \leq 30$  ויש להבדיל ~~מקרה~~  $a_{n+1} - a_1 \leq 30 - 1$

$$0 \leq a_i - a_j \leq 2n \iff 1 \leq k-l \leq 2 \iff 0 \leq k-l \leq 3 \iff 1 - |s|$$

(Geben hier eine Gleichung an die  $0 = a_1 - a_2$  in einer Zeile)

20/20

### פתרון שאלה 3

שאלה: סך האמצעים המיוחסים 3 שאלות 3-5

✓ האמצעים הם: 3 שאלות 3-5

השאלות הן: 3 שאלות 3-5

$$|A| = |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|S| = \binom{6}{2,2,2} \leftarrow \text{מספר דרכים 6 שאלות 3-5}$$

$$|A_1| = 3 \cdot \binom{4}{2,2} \leftarrow \text{מספר דרכים 3 שאלות 2-5}$$

$$|A_2| = 3 \cdot 2 \leftarrow \text{מספר דרכים 2 שאלות 2-5}$$

$$|A_1 \cap A_2| = 3 \cdot 2$$

התוצאה היא: 48

$$\binom{6}{2,2,2} - 3 \cdot \binom{4}{2,2} + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 =$$

$$\binom{6}{2,2,2} - 9 \cdot \binom{4}{2,2} + 12 = 48$$

מספר דרכים 48

\*) התוצאה היא: 48

הם: 3 שאלות 3-5

התוצאה היא: 48

18/20

## פתרון שאלה 4

Q. - n-n jet 276 N<sup>2</sup>J 10012 33N - 100J

$$a_1 = 1, a_2 = 4$$

$$a_n = 2(\underbrace{a_{n-1} - a_{n-2}}_{\substack{\text{הפרש} \\ \text{לפני} \\ \text{לפני}}}) + a_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 =$$

∴ ଫଳାଫଳ ଯଥାପରି

$$x^2 - 2x - x + 2 = (x-2)(x-1) \Rightarrow 2$$

$$a_n = a \cdot 2^n + b \cdot 1^n$$

$$n=1: 1 = 2a + b$$

$$n=2: \quad y = ya + b$$

$$2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -2$$

$$a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - 2 = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$$

א.מ' בליל פסח קטן שנת ה'תשנ"ב

20/20

# פתרון שאלה 5

בכמה אופנים ניתן להחליט סכום של 12 פירות

הפירות - הם עצמם  
 0 ≤ x<sub>1</sub> ≤ 4  
 0 ≤ x<sub>2</sub> ≤ 4  
 0 ≤ x<sub>3</sub> ≤ 4  
 0 ≤ x<sub>4</sub> ≤ 4

x<sub>1</sub> + x<sub>2</sub> + x<sub>3</sub> + x<sub>4</sub> = 12

המקרים הנ"ל הם המקרים הבאים:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^4 = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^4 = (1-x^5)^4 \cdot \frac{1}{(1-x)^4}$$

$$\left(\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-x^5)^k x^k\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

אנחנו רוצים למצוא את המקרה של x<sup>12</sup> בלבד

$$a_{12} = \binom{4}{0} \cdot \binom{15}{3} - \binom{4}{1} \cdot \binom{10}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} =$$

המקרה של x<sup>12</sup> הוא המקרה של x<sup>12</sup> בלבד

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} - 4 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} + 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} =$$

$$\frac{1}{3!} (15 \cdot 14 \cdot 13 - 4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = \frac{1}{3!} (6 \cdot 7 \cdot 13 - 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 8 + 6 \cdot 4 \cdot 3) =$$

$$\frac{6 \cdot 5}{3!} (7 \cdot 13 - 4 \cdot 3 \cdot 8 + 4 \cdot 3) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} (13 - 12) = \frac{7}{3}$$

כאשר אנחנו רוצים למצוא את המקרה של x<sup>12</sup> בלבד

המקרה של x<sup>12</sup> הוא המקרה של x<sup>12</sup> בלבד

$$\binom{7}{3} = \binom{4+4-1}{4-1} = 12$$

$$\binom{7}{3} = 35$$

$$\binom{7}{3} = 35$$

$$18/20$$

דף "חירות"