

19/9/11

מבוא לתורת הקבוצות, 2011  
מבחן מסכם, סמסטר א', מועד ב'  
מרצה: אלי גלזנר

- משך הבחינה – 3 שעות.
- אין להשתמש בחומרי עזר.

חלק I (40%): ענו על אחת מתוך שתי השאלות הבאות עם פירוט מלא.

1.א. הוכיחו את משפט דדקינד: תהי  $A$  קבוצה כלשהי, קיימת תת קבוצה ממש

$$B \subset A \text{ (} B \neq A \text{) כך ש } B \sim A \text{ אם "ם קיימת תת קבוצה } D \subseteq A \text{ כך ש } D \sim \omega.$$

ב. קבוצה  $A$  נקראת "סופית" אם יש מספר טבעי  $n \in \omega$  עבורו  $A \sim n$ . הוכיחו

בעזרת משפט דדקינד שקבוצה  $A$  איננה "סופית" אם "ם יש תת קבוצה ממש

$$B \subset A \text{ (} B \neq A \text{) כך ש } B \sim A \text{ (מותר להגדיר פונקציות ברקורסיה).$$

ג. האם השתמשתם באקסיומת הבחירה בסעיף הקודם? אם כן כיצד?

2.א. תהי  $X$  קבוצה ו  $\psi : P(X) \rightarrow P(X)$  העתקה שומרת הכלה (כלומר

$$(\forall A, B \in P(X), A \subseteq B \Rightarrow \psi(A) \subseteq \psi(B)) \text{ הוכיחו שקיימת } Y \subseteq X \text{ כך ש } \psi(Y) = Y.$$

ב. יהיו  $A, B, D \subseteq \mathbb{R}$ , ו-  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$  פונקציות חח"ע.

בניח ש  $f, g$  משמרות את  $D$  ואת משלימתה  $D^c$  (כלומר,

$$f(A \cap D) \subseteq B \cap D \text{ ו- } f(A \cap D^c) \subseteq B \cap D^c \text{ וכנ"ל עבור } g).$$

האם יש העתקה חח"ע ועל  $h : A \rightarrow B$  שגם משמרת את  $D$ ?

חלק II: ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות (20% כל אחת). הסבירו את תשובותיכם.

3. יהיו  $\omega$  הסודר האינסופי הראשון ו-  $\omega_1$  הסודר האינסופי הראשון שאינו בן מניה.

סדרו את הסודרים הבאים ע"פ גודלם (ציינו גם שוויונים):

$$2 \cdot \omega_1, \omega + \omega_1, \omega_1 + \omega, \omega^{\omega_1}, \omega_1^{\omega}, \omega \cdot \omega_1$$

4. יהי  $J$  קבוצת הטבעיים -  $\mathbb{N}$  או  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  עבור איזה  $n \in \mathbb{N}$ . יהי

$$\{A_j\}_{j \in J} \text{ אוסף של קבוצות סדורות היטב. תהי } X = \prod_{j \in J} A_j \text{ ויהי } \leq_{lex} \text{ הסדר}$$

הלקסיקוגרפי על  $X$ .

א. הוכיחו ש-  $\leq_{lex}$  הוא סדר ליניארי על  $X$ .

ב. הוכיחו שאם  $J$  סופית אז  $\leq_{lex}$  הוא סדר טוב על  $X$ .

ג. תנו דוגמא (כאשר  $J = \mathbb{N}$ ) עבורה  $\leq_{lex}$  אינו סדר טוב על  $X$ .

5. הראו כיצד ניתן להסיק את אקסיומת הבחירה ממשפט הסדר הטוב (משפט צרמלו). (נסחו את שניהם במדויק)

6. נסחו פורמאלית את סכימת אקסיומת הכוללות של Frege והראו שהיא מובילה לסתירה (פרדוקס ראסל)

בהצלחה

AAAC-39