מבחן במבוא לאלגברה 2

מרצה: פרופסור דוד גינזבורג

מועד א' סמסטר ב תש"ע 20.6.2010

יש לענות על כל השאלות.

1. הוכיחו את המשפט הבא: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו כי T ניתנת ללכסון אם ורק אם הפולינום המינימלי של T הוא מכפלה של פולינומים לינאריים שונים.

2. (א) הוכיחו כי כל מטריצה A המוגדרת מעל $\mathbb{C}$, ונמצאת בצורת ג'ורדן, היא סכום של שתי מטריצות הפיכות.

   (ב) הוכיחו כי כל מטריצה A המוגדרת מעל $\mathbb{C}$ היא סכום של שתי מטריצות הפיכות.

3. (א) תהי $0 \neq A$ מטריצה מסדר 2×2 עם מקדמים ב־$\mathbb{C}$. נניח כי A צמודה לעצמה, כלומר $(A = A^*)$. הוכיחו כי $A^2 \neq 0$.

   (ב) הוכיחו כי לכל m טבעי, מתקיים $A^{2^m} \neq 0$.

   (ג) הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $A^k \neq 0$.

4. (א) מצאו את כל צורת ג'ורדן האפשריות של העתקה $T : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ המקיימת:

$$m_T(x) = x^3, \quad \dim \ker T = 3$$

   (ב) מצאו את כל ערכי $a, b, c \in \mathbb{C}$ עבורם הפולינום המינימלי של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ & 2 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

   הוא $(x-1)(x-2)$.

AAAS -30

66

מחברת מס' 4
מתוך 2 מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

חפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **מלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחוק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר,יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (מופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר **למשגיח** את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.

11. אין לנהוג בניגוד להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה.

בהצלחה.

תאריך הבחינה 20.6.2010
שם הקורס מבוא לאלגברה I
שם המורה פרופ' בוך בינלבוים

מס' זיהוי

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 93
המחברת נבדקה ביום טו/7/5
חתימת המורה

3020597

טיוטה

1) $\boxed{\Leftarrow}$ T לכסין ⇐ קיים בסיס של ו"ו V^n B

⇐ $V = span\{v_1,\dots,v_n\}$ ⇐ כיוון פשוט

$f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ $\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$

נניח כי T ונכפל ב- v_i, ואז יש ו"ו:

$f(T)v_i=(T-\lambda_1 I)(\ )(\ )\cdots(T-\lambda_k I)v_i$

בהכרח מתאפס ... כי v_i ו"ע ש מדומה.

$f(T)v=0$

$v\neq v_i$ אין $f(T)=0$.

מהגבוה פ"מ מתקבל פ' שמאפס ת, ולכן

גם פ"מ.

$\boxed{\Rightarrow}$ הפולינום המינימלי מכפלה ש פולינומים לינ' שונים.

⇐ $m_T(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$

$V_i=\ker(x-a_i)$ לפי משפט הפירוק היסודי, נסמן

$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$ ונקבל

כלומר קיים בסיס ש ו"ו

$\ker(T-\lambda_i I)$ ל- V_i כלומר בסיס שלוקח עצמים המתאימים

ל- λ_i ולכן $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ ולכן קיים בסיס ש

יקבלו עצמים ⇐ T לכסינה.

---

2) A מדורג עיורדין

$A\begin{pmatrix} M_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_{n_r}\end{pmatrix}$

שאלות 1,2,4
במאגר הנלא ,
שאלה 3 במאגר הנייה

(1) נניח: T אופרטור לינארי במ"ו V מעל $\mathbb{C}$.
T לכסין אם"ם הפולינום המינימלי של T מתפרק לגורמים לינאריים שונים.

הוכחה בכיוון $\boxed{\Leftarrow}$: נניח T לכסין. אז קיים בסיס של וקטורים עצמיים של T שהוא בסיס ל- V.
נסמן את הבסיס $B=\{v_1,\dots,v_k\}$, ויהי הע"ע המתאימים: $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$. נגדיר פולינום $f(x)$ שנגדיר:

$$f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdot(x-\lambda_3)\cdot\dots\cdot(x-\lambda_m)$$

נציב כן $x=T$:

$$f(T)=(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_m I)$$

ונפעיל את שני הצדדים ב- v_i, וקטור עצמי כלשהו של אחד מהערכים העצמיים:

$$f(T)v_i=(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_m I)v_i$$

הוא ל- v_i הוא ע"ע של אחד הע"ע, בהכרח הראשון מתאפס. (נימוק:

$$\begin{cases} Tv_i=\lambda_i v_i \\ \Rightarrow (Tv_i-\lambda_i v_i)=0 \\ \Rightarrow (T-\lambda_i I)v_i=0 \end{cases}$$

לכן:

$$f(T)v_i=(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_m I)v_i=0$$

כלומר

$$f(T)v_i=0$$

הוא ל- v_i הוא ע"ע, הוא $\neq 0$, לכן $f(T)=0$.
כלומר $f(x)$ מתאפס בהצבת T. לכן, לפי הצבת הפולינום המינימלי, $m_T(x)\mid f(x)$.

$\Leftarrow$ $f(x)$ הוא מכפלת גורמים לינאריים, $m_T(x)$ מחלק אותו ולכן גם הוא בהכרח מכפלת גורמים לינאריים.

המשך $\Leftarrow$

סיכום

$$A=\begin{pmatrix} M_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_{n_r}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{matrix}} & \\ & & \boxed{\lambda}\end{pmatrix}$$

$$A=PJP^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{matrix}}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\boxed{0} & \\ & \begin{pmatrix}0 & 1\\ & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2 & 1\\ & 2\end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix}2 & 1\\ & 1\end{matrix}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1\\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$$

הפיכה

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ & 0\end{pmatrix} = I - I$$

$$(1+i)(1-i) = 1+(-)i^2 = 2$$

a^2+b^2

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad c\cdot\bar{c}$$

$c=\bar{b}$

$b=\bar{c}$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{a} & \bar{c}\\ \bar{b} & \bar{d}\end{pmatrix}$$

$a=\bar{a}$ מספר

$d=\bar{d}$ מספר

הפיך מלא מטריצה. ⇐ לכסינה יוניטרית. ⇐ נורמלית. $A=A^*=\bar{A}^t$

$A=$

$$\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+dc & cb+d^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boxed{a^2+|c|^2} & ab+bd\\ ac+dc & \boxed{|c|^2+d^2}\end{pmatrix}$$

$$A=PDP^{-1}$$

$$D=\begin{pmatrix}x & \\ & y\end{pmatrix}$$

$$A^2=PD^2P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}x^2 & \\ & y^2\end{pmatrix}P^{-1}$$

המשך שאלה 1

הוכחה דרוש $\boxed{\Leftarrow}$: נניח $m_T(x)$ הוא מכפלת פולינומים לינאריים שונים:

$$m_T(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_m).$$

נסמן $V_i=\ker(T-\lambda_i I)$ כלומר זה $q_i(x)$ הוא הפולינום ה-i בתוך המכפלה $m_T(x)$, אז V_i הוא הגרעין של הצמצום T ב-q_i.

הפולינומים המרכיבים את מכפלת $m_T(x)$ הם שונים, לכן נוכל להפעיל את משפט הפירוק היסודי ונקבל:

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$$

כלומר, הוא שלכל V_i הינו בסיס של וקטורים עצמיים של T בעצמם T ל-V_i, הרי שיש שקיים בסיס של ו"ע של T ל-V לפי משפט הפירוק היסודי. לפי משפט, קיים בסיס של ו"ע של T $\Leftarrow$ לכסינה.

הראינו אם כן כי

T לכסינה $\Leftrightarrow$ הפולינום הוא מכפלת גורמים לינאריים.

תרגיל

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_T(x) = x^6$. כלומר $k = 6$.

$$\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 1 & 2 & c \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & a & b \\ 0 & 2-x & c \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 2-x & c \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 0 & \\ & \end{vmatrix} + 0$$

$$\Delta_A = (2-x)^2(1-x)$$

כלומר m_A הוא $(2-x)(1-x)$ או $(2-x)^2(1-x)$.

נבדוק אילו ערכי a,b,c גורם ש- $(2-x)(1-x)$ ל- A יאפס.

$$(2I-A)(I-A)$$

$$2I-A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$T:\mathbb{C}^6\to\mathbb{C}^6$ (4) (א)

$$\mathrm{Min}_T(x)=x^3, \quad \dim\ker T=3$$

$\Downarrow$ ריק ש $\lambda_1=0$ הוא לפחות 3.

$\Downarrow$ $\dim\ker(T-0I)=3$ $\Downarrow$ ריק ש $\lambda_1=0$ הוא 3.

לפי הפ"מ, ניתן לראות כי $\lambda=0$ הוא הע"ע היחיד של T. לפי $\dim\ker T$ מקבלנו כי הריבוי הגיאומטרי ש $\lambda=0$ הוא 3, ולפי דרגת הפ"מ מקבלנו ~~[illegible]~~ כי הבלוק הגדול ביותר בדרגת צורדן של T יהיה בגודל 3 ויהיה לפחות אחד כזה. בנוסף יודע כי הריבוי האלגברי הוא 6 (לפי הפ"מ שצריך להיות בדרגת $n=6$, כי הע"ע היחיד הוא 0), אז זה לא אומר בהכרח שה. לכן צורת צורדן האפשרית לשם כיסה תהיה $[T]_B=PJP^{-1}$

$$J_1=\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&&&\\&&&0&&\\&&&&0&\\&&&&&0\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&&&\\&&&0&1&\\&&&&0&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

$$J_3=\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

הן לא ניתנות אם מלוטו ו שיינבורגמליה T

(עד כדי דמיון כלומר עד כדי אותו סדר הבלוקים על האלכסון).

NON

$b + ac - b = ac$

$c - c$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 ב

$$A=\begin{pmatrix}2 & a & b\\ 0 & 2 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

נמצא הפולינום האופייני של A:

$$\Delta_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix}x-2 & -a & -b\\ 0 & x-2 & -c\\ 0 & 0 & x-1\end{vmatrix}$$

בסיאת דטרמינטה לפי עמודה נקבל:

$$\Delta_A(x)=(x-2)^2(x-1)$$

(טהה פירוק ראשוני).

כלומר, הפולינום המינימלי $m_A(x)$ הוא: $(x-2)^2(x-1)$ (הפיכה) $=$ $(x-2)(x-1)$ אולי.

וגם משם ש- $m_A(x)\mid\Delta_A(x)$.

נבדוק אם אין ערכי a,b,c מתקיים $(A-2I)(A-I)=0$ (כי ודאי מינימלי $m_A(A)=0$).

נגיד:

$$A-2I=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\qquad A-I=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נכפול:

$$(A-2I)(A-I)=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & a & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

כלומר, המגבלה היחידה היא על a, שצריך להיות 0.
ואז $ac=0$ ממילא כי $a=0$, לכן אין מגבלה על c
וגם לא על b. לסיכום:

$$\boxed{a=0 \quad b,c\in\mathbb{C}}$$

כי אין ← $\mathbb{C}$.

מכון הרצוג

תרגיל

$$C\,A = P\,J\,P^{-1}$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{A} & & \\ & \boxed{B} & \\ & & \boxed{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{B_1} & \\ & & \boxed{C_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{A_2} & & \\ & \boxed{B_2} & \\ & & \boxed{C_2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda-1 & & & \\ & \lambda-1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\det = (\lambda-1)^4 \neq 0$ $\qquad$ $\det = 1 \Downarrow \neq 0$

$\Leftarrow$ כל מטריצה מעל $\mathbb{C}$ ניתנת ללכסון

2 (א) C מוגדרת מעל $\mathbb{C}$ ונמצאת בצורת ג'ורדן, לכן צורתה כללי:

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

כאשר J_i הוא בלוק ג'ורדן בגודל m עבור λ_i מעל הלוכסון:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

כל J_i ניתן לכתיב כסכום של שני המטריצות הבאות:

אם $\lambda_i \neq 1$ אז נכתוב:

$$J_i = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i-1 & & & 0 \\ & \lambda_i-1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i-1 \end{pmatrix}_{m\times m}}_{=A_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{m\times m}}_{=B_i}$$

ואם $\lambda_i = 1$ נכתוב:

$$J_i = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i-2 & & & 0 \\ & \lambda_i-2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i-2 \end{pmatrix}_{m\times m}}_{=A_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}_{m\times m}}_{=B_i}$$

בכל מקרה שני המטריצות המתאימות ל- J_i הן הפיכות, משום ש- A_i, B_i הפיכות:

$\det A = (\lambda_i - 1)^m \neq 0$

או $\det A = (\lambda_i - 2)^m \neq 0$

ובכל מקרה $\det A, \det B \neq 0$ $\Leftarrow$ הפיכות.

$\det B = 1$ או 2^m.

לפי תקין מטריצות בלוקים, נכתוב:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}}_{B}$$

ולפי כלל הכפל, $\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_k \neq 0$, $\det B = \det B_1 \cdot \ldots \cdot \det B_k \neq 0$

המשך ←

סיכום

$$CA = PAP^{-1}$$

$$CA = P(A+B)P^{-1}$$

$$= PAP^{-1} + PBP^{-1}$$

$$\det|PAP^{-1}| = |P||A||P^{-1}| = |A| \neq 0$$

$$P(AP^{-1} + BP^{-1})$$

$$= PAP^{-1} + PBP^{-1}$$

A 2×2. $A^* = A$ לומר A נורמלי

כלומר A נרסינה (אוניטרית)

בנוסף A דיאגונלי לצמוד $\Leftarrow$ כל הע"ע ממשיים.

$$A = PDP^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$A^2 = PD^2P^{-1} \qquad a\cdot b \neq 0$$

ממשיים!

$\det A \neq 0$ כי

$$\det A^2 = \det D^2 = a^2 + b^2 \neq 0 \qquad D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & \\ & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a+d \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$(x+yi) + (z+mi) = x+y$$

הוכחה (E2):

אם $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$

$\Leftarrow$ A, B הפיכות ולכן $C = A + B$

C סכום של 2 מטריצות הפיכות.

(2) **דוגמה:** מצא $\mathbb{C}$ כל מטריצה הינה סכום של שתי מטריצות הפיכות.

פתרון: לפי משפט, מצא $\mathbb{C}$ כל מטריצה הינה רכסיבה

(נימוק כללי: מצא $\mathbb{C}$ כל פולינום מקפרק לגורמים לינאריים, ובפרט הפולינום המינימלי $\Leftarrow$ כל מטריצה רכסיבה מצא $\mathbb{C}$).

לכן בפרט, יש לה צורת ג'ורדן.

לכן לפי סעיף א', הינה דומה למטריצה שהינה סכום של שתי מטריצות הפיכות. תהי C מטריצה ב- $\mathbb{C}$, אז:

$$C = PJP^{-1}$$

כאשר J מטריצה בצורת ג'ורדן (בה אלכסונית הינה בצורת ג'ורדן).

אבל לפי סעיף א': (A, B הפיכות)

$$C = P(A+B)P^{-1}$$

נפתח סוגרים:

$$C = PAP^{-1} + PBP^{-1}$$

כלומר C הינה סכום של שתי מטריצות הדומות למטריצות הפיכות.

בגרמינוה נשמרת בדמיון ולכן בה PAP^{-1} ו- PBP^{-1} הפיכות $\Leftarrow$ C סכום של שתי מטריצות הפיכות.

שאלה

$a,b,c,d \in \mathbb{C}$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2}$

$A=A^*$

דמוקה לעצמה ⇐ כל הע"ע ממשיים.

⇐ נורמלי ⇐ לכסינה.

דומה

$A=P\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}P^{-1}$

$A^2=P\begin{pmatrix} x^2 & \\ & y^2 \end{pmatrix}P^{-1}$

$x+y=a+d\in\mathbb{R}$

$A\neq 0$

$\Downarrow$

$\det A\neq 0$

$\det A=xy\neq 0$

$\det A^2=x^2y^2=(xy)^2\neq 0$

$A^{2^m}=P\begin{pmatrix} x^{2^m} & \\ & y^{2^m} \end{pmatrix}P^{-1}$

$\det(A^{2^m})=(xy)^{2^m}$

טיוטה

(3) (ב) $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

נתון: A דומה לעצמה.

ומכך נובע לפי משפטים כי: 1) A נורמלית

2) A לכסינה

3) כל הע"ע של A הם ממשיים.

A לכסינה, לכן A דומה ל- D מטריצה אלכסונית שכל ע"ע ממשיים:

$$A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}P^{-1}$$

בנוסף נתון $A \neq 0$ לכן $\det A \neq 0$.

בגלל המינוח נשמרת בדמיון ולכן

$$\det A = \det D = x \cdot y \neq 0$$

נעלה את A בריבוע:

$$A^2 \underset{(P\cdot P^{-1}\text{ מבטלים})}{=} PD^2P^{-1} \underset{(\text{בגלל הנתון})}{=} P\begin{pmatrix} x^2 & \\ & y^2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

שוב, det נשמר בדמיון ולכן

$$\det(A^2) = x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$$

הנתון $x \cdot y \neq 0$ ולכן $(xy)^2 \neq 0$ ולכן $\det(A^2) \neq 0$

ומכאן $A^2 \neq 0$.

שאלה 3

במידרגת השניה

לשימוש המרצה בלבד

טבלה לחישוב ציונים

ציון	שאלה

(66)

מחברת מס' 2
מתוך 2 מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

חפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש רייموند ובברלי סאקלר

תאריך הבחינה 30.06.2010

שם הקורס מבוא לאלגברה II

שם המורה פרופ' דוד גינצבורג

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)
[redacted]

לשימוש המורה הבוחן:

הציון _____

המחברת נבדקה ביום _____

חתימת המורה _____

3020341

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או במסוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר,יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (מופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן יסולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.

[redacted]

בהצלחה.

גיוסי

A נילפוטנטית $\Leftarrow$ 1) A נורמלית $\Leftarrow$ $A^4v=0 \Leftarrow Av=0$

2) A לכסינה

3) כל הע"ע מתאפסים.

$Av=0 \Leftarrow A^4v=0$

$A^*v=\bar{\lambda}v \Leftarrow Av=\lambda v$ ויקטוריאלי

$\tau=0 \Leftarrow (\tau v,v)=0$

$$A=P\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^2=P\begin{pmatrix} x^2 & \\ & y^2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\Delta_A = x^2-tr(A)x+(-1)^2\det A$$
$$=x^2-(trA)x+\det A$$

$$\Delta_A(A)=0=A^2-tr(A)\cdot A+\det A=0$$
$$A^2=trA(A)-\det A$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$(x+y)A\neq 0 \qquad xy$$

$A=\bar{A}^t$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\overline{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a=\bar{a} & b=\bar{c} \\ d=\bar{d} & c=\bar{b} \end{pmatrix}$$

$$A^2=AA^*=\begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & a\bar{c}+b\bar{d} \\ ac+d\bar{b} & |c|^2+|d|^2 \end{pmatrix}$$

a,b,c,d לפחות אחד מהם לא 0.

אלכסון כלשהו אינו לא יכול שכל מתאפס $\Leftarrow$ $A^2\neq 0$

נכון

$$A = PDP^{-1}. \qquad A^{2m} = P\begin{pmatrix} x^{2m} & \\ & y^{2m} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}$$

מספר xy

אלכסון x^{2m}

y^{2m}

$$\operatorname{tr} A^{2m} = \operatorname{tr} D^{2m} = x^{2m} + y^{2m}$$

$$\det A^{2m} = x^{2m} \cdot y^{2m} = (xy)^{2m} = (xy)^2$$

. $\operatorname{tr}(A^i) \neq 0$ כי קיים

$\Downarrow$

x, y אלכסון

$$A^2 = PD^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} x^2 & \\ & y^2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{2m} = DD^{2m}P^{-1} = P\begin{pmatrix} x^m & \\ & y^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$0 = \langle A^k v, A^k v \rangle = \langle v, A^{2k} v \rangle$$

$$\Rightarrow A^{2k} v = 0$$

$$2k = 2^m + i$$

$$= A^{2^m} \cdot A^{2i} = 0$$

$$= A^{2^m} \cdot A^{i} = 0$$

3 (ב) $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ יהי A המקיים: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

קונסף $A^*=A$, $A^*=\bar{A}^t$ לכן: $A=\bar{A}^t=\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$

מכך נובע: $\bar{a}=a,\ d=\bar{d}$ $\Leftarrow$ a,d ממשיים.

$b=\bar{c}\ ,\ \bar{b}=c$

נכפל $A\cdot A^* = A^2 = A\cdot A$

$$A^2=A\cdot A^*=\begin{pmatrix} a\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{b} & a\bar{c}+b\bar{d} \\ c\bar{a}+d\bar{b} & c\bar{c}+d\bar{d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & a\bar{c}+b\bar{d} \\ c\bar{a}+d\bar{b} & |c|^2+|d|^2 \end{pmatrix}$$

נתון כי $A\neq 0$, לכן לפחות אחד מהאלכסונים a,b,c,d שונה מאפס. קונסף $|d|^2, |c|^2, |b|^2, |a|^2$ כולם חיוביים, ~~[illegible]~~ וכולם מופיעים על האלכסון.

נניח שלהבדיל כי $a\neq 0$ (באופן מידה יכול להיות a,b,c,d) ואז $|a|^2\neq 0$ (גם אם הינו בחרו אברים מהדרך הראשונה $\neq 0$).

קונסף כל ~~[illegible]~~ המאלכסון על האלכסון חיוביים ולכן לא יתכן ~~[illegible]~~ שאחד מהם מאפס זה $|a|^2$. לכן יש איבר ב- A^2 שונה מאפס

$\Leftarrow$ $\boxed{A^2\neq 0}$. (האיבר הזה הוא על האלכסון).

ג'ורדן

$A=$

$$A^{2m}=P(D^2)^m P^{-1}=P\begin{pmatrix} x^{2m} & \\ & y^{2m}\end{pmatrix}P^{-1}$$

דמוגה לעצמה ⇐ כל הסיע אמת מעשי

$$\Delta_A=\lambda^2-tr(A)+\det(A)$$

$$tr(A)\to(x+y)$$

$A^k\neq 0$ כלומר

אפשר להראות ש-

$$\Delta_A=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

$$A^k=P\begin{pmatrix} x & \\ & y\end{pmatrix}^k P^{-1}$$

x (ראשי)

(ראשי): אי $A^k v=0$ אי $Av=0$

$\langle Av, v\rangle=0$ ולכן v ⇐

$$A^k=P\begin{pmatrix} x^k & \\ & y^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

$A^k=(A^{2m})A$ אי זוגי ⇐ לפי ב'.

$A^k=(A^{2m})A=P\begin{pmatrix} x^{2m+1} & \\ & y^{2m+1}\end{pmatrix}$ אי זוגי ⇐

המשך ②

ב) הוכיחו בסעיף א' כי $A^2 \neq 0$ ובנוסף בודאות יש לו איבר חיובי שונה מאפס על האלכסון.
בנוסף כל איברי האלכסון של A^2 חיוביים לכן $tr(A^2) \geq 0$ ובפרט $tr(A^2) \neq 0$.

הוכיחו כי A דומה לעצמה, כלומר משפט הפירוק הנורמלי לכסינה:

$$A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}P^{-1} \qquad x+y = tr(A)$$

$$\Downarrow$$

$$A^2 = PD^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} x^2 & \\ & y^2 \end{pmatrix}P^{-1} \qquad x^2+y^2 = tr(A^2) > 0$$

$P^{-1}P$ מצטמצם

כמו בעיקרון

$tr(A^2) \neq 0$ לכן $x^2 > 0$ או $y^2 > 0$:

$$A^{2^m} = P(D^2)^m P^{-1} = P\begin{pmatrix} x^{2^m} & \\ & y^{2^m} \end{pmatrix}P^{-1}$$

הנקודה 2^m גוררת לכן התוצאה של x^2 או y^2 נשמרת, לכן בהכרח $tr(D^{2^m}) \neq 0$.

סקרה נשמרת בדומיין לכן גם $tr(A^{2^m}) \neq 0$,
כלומר יש איבר שאינו אפס ב A^{2^m}, כלומר $\boxed{A^{2^m} \neq 0}$.

ג

סיומה

A נורמלי דמודה לעצמה.

A^k נורמלי: $A^k v=0 \Rightarrow Av=0$

יש כסים איזומ.

דמודה לעצמה: כל הע"ע ממשיים.

נורמלי.

לכסין יוניטרית.

כל הע"ע אפס.

k אי-זוגי.

$\langle A^k, A^k \rangle = 0$

אין $A^k v=0$

יהי v ע"ע.

$\langle A^k v, A^k v \rangle$

$= \langle A \cdot A^{2m} v, A^k v \rangle$

$= \langle A^{2m} v, A^* A^k v \rangle$

$\langle A^{2m} v, A^{k+1} v \rangle = \langle A^{2m} v, A^{2m+2} v \rangle$

$\Downarrow$ $\neq 0$ כי $v \neq 0$

$A^{2m+2} v \neq 0$

$\Downarrow$ $\neq 0$

$A^{2m}(v, A^2 v)$

$\Downarrow$ $\neq 0$

$(A^2 v, v) = 0$

אין $A^2 = 0$

$2k = 2m + i$

i אי-זוגי

$A^* = A$

$\langle A^k v, A^k v \rangle = 0$

$\Downarrow$

$\langle v, A^{2k} v \rangle = 0$

$A^{2m+i} = 0$

$\langle Tv, v \rangle = 0$

$\langle v, Tv \rangle = 0 = \langle Tv, v \rangle$

$\langle v, Tv \rangle = \langle Tv, v \rangle = 0$ $\quad \langle Tv, v \rangle = 0$

$\Rightarrow T = 0$

3. לפי טענה שהוכחה בכיתה, לעצירה נורמלית A' מתקיים כי אם $A^k v=0$ אז $A'v=0$.
לכל v כלשהו.

לכן נניח $A^k=0$ בשביל,

A הרמיטית (נתון) $\Leftarrow$ A נורמלית.

לכן לפי הנחה $A^k v=0$ לכל v כי $A^k=0$

ולפי הטענה $A^k v=0$, A נורמלית $\Leftarrow$ $Av=0$
לכל v.

אבל נתון כי $A\neq 0$ $\Leftarrow$ סתירה.

$\Leftarrow$ $A^k\neq 0$.

$\langle A^{k} v, A^{2m} v\rangle = 0$ $\qquad k = 2m+1$

$\langle A^{2m} A v, A^{2m} v\rangle =$

$\langle Av, A^{4m} v\rangle$

$A\langle v, A^{4m-1} v\rangle = 0$

$A^{4m-1} = 0$

$A^{k} v = 0$

$\Downarrow$

$Av = 0$

$\langle A^{k} v, A^{k} v\rangle = 0$ $\qquad k = 2m+1$

$\langle A^{2m} A v, A^{k} v\rangle$

$A^{2m}\langle Av, Av\rangle = \langle v, A^{2} v\rangle$

לא מתאפס

$A^{2} = 0$

$= 0$ מתקיים.

$\langle A^{k} v, A^{k} v\rangle = 0$

$\langle A^{2m+1} v, A^{2m+1} v\rangle = 0$

$\langle v, A^{4m+2} v\rangle = 0$

$\Rightarrow A^{4m+2} v = 0$

$\uparrow$

צריך

מתקיים.

$7+4=9$

$2, 4, 8, 16, \ldots$

$k = 2^{m} + i$

i אי-זוגי

$\langle A^{2^{m}+i} v, A^{2^{m}+i} v\rangle = 0$

$\langle v, A^{(2^{m+1}+2^{m}+i)} v\rangle$

$= 2^{m+1} + 2i$

$A^{2^{m}} = A^{2}$

$A^{(2^{m}+1)^{2}}$

$A^{2^{m+1}} \cdot A^{2i}$

$\langle A^{k} v, A^{k} v\rangle = 0$

$\langle v, A^{2k} v\rangle = 0$

לשימוש המרצה בלבד

טבלה לחישוב ציונים

ציון	שאלה