

מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

מבחן במבוא לקומבינטוריקה ולתורת הגרפים

סמסטר ב' התש"ע, אוקטובר

תאריך: 18/10/06

מרצה: פרופ' נוגה אלון

CC-6

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבון.
- במבחן חמש שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על ארבע מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן. יש להקפיד ולרשום את מספר הסטודנט על טופס הבחינה.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".

בהצלחה!

	1
	2
	3
	4
	5

מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

שאלה 1

חשבו את הסכום

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$$

תשובה:

הוכחה:

מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

שאלה 2

תהא A קבוצה בת 20 מספרים טבעיים שונים בין 1 ל 1000. הוכיחו כי יש שתי תת־קבוצות זרות $X, Y \subseteq A$ עבורן $|X| = |Y| > 0$ וגם

$$\sum_{x \in X} x = \sum_{y \in Y} y.$$

הוכחה:

_____ מס' מחברת: _____

_____ ת.ז.: _____

שאלה 3

יהא $n > 4$ טבעי. מהו מספר הפונקציות $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ שהן על?

תשובה:

הוכחה:

מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

שאלה 4

נסמן ב a_n את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהספרות 0, 1, 2 שאינן מכילות זוג אפסים או זוג אחדות עוקבים (נשים לב כי $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 7$).
(א) הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.

הוכחה:

(ב) מצאו נוסחה מפורשת ל a_n .

תשובה:

הוכחה:

מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

שאלה 5

תהא A מטריצה $n \times n$ עם איברים אי־שליליים המקיימת $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} = 1$ לכל $1 \leq j \leq n$.
הראו שיש תמורה $\pi \in S_n$ כך ש $a_{i,\pi(i)} > 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.

הוכחה: