



סמסטר א', תשע"ח  
מועד א'  
תאריך הבחינה: 14.02.2018

**בחינה ב"מבוא מתמטי לפיזיקאים 1"**

מרצה: פרופ' רנן ברקנא  
מתרגלים: ארז כהן, בר חן

משך הבחינה: שלוש שעות  
חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון לא גרפי

הוראות לנבחן:

- א. בבחינה 8 שאלות; יש לענות על 3 מתוך שאלות 1-4 (20 נקודות בכל שאלה) ועל 3 מתוך שאלות 5-8 (13 נקודות בכל שאלה). נקודה אחת מקבלים במתנה.
- ב. על השאלות יש לענות בגוף השאלון בעמוד השאלה, בצורה מלאה המראה את כל השלבים בפתרון יחד עם הסברים קצרים. עדיף לכתוב בעט (לא עפרון או טוש).  
המחברת הינה לטייטה בלבד והיא לא תיבדק.
- ג. מבחן זה הינו במתמטיקה. יש להימנע מהחלפת ביטויים בפיתוחים מספריים מקורבים, לדוגמא יש להשאיר ביטוי כגון  $\sqrt{2\pi}$  כפי שהוא, ולא להחליפו ב-2.506628, למעט כאשר קירוב כנ"ל נדרש במפורש בשאלה.

מספר סידורי: 127

מספר זהות: 312530280

לשימוש הבודקים בלבד:

שאלה	ציון
1	20
2	-
3	20
4	20
5	13
6	13
7	-
8	13
ציון הבחינה	100

**בהצלחה !!**





$$z^3 = \frac{27i + \sqrt{243}}{i - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(1) מצאו את כל הפתרונות של המשוואה:

בנוסף, שרטטו אותם במישור המרוכב.

נכפיל בצמוד

$$\frac{27i + \sqrt{243}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + i} \cdot \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - i}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - i} = \frac{27 - \sqrt{81} + i(-\sqrt{243} - \frac{27}{\sqrt{3}})}{\frac{1}{3} + 1} =$$

$$= \frac{3}{4} (18 - \sqrt{972} i)$$

$$z^3 = 27 e^{i(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k)}$$

נמצא את  $r$  ו- $\theta$

$$r = \sqrt{13.5^2 + (-\sqrt{972} \cdot \frac{3}{4})^2} = 27$$

$$\theta = \arctan \frac{-\sqrt{972}}{18} = \tan^{-1} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

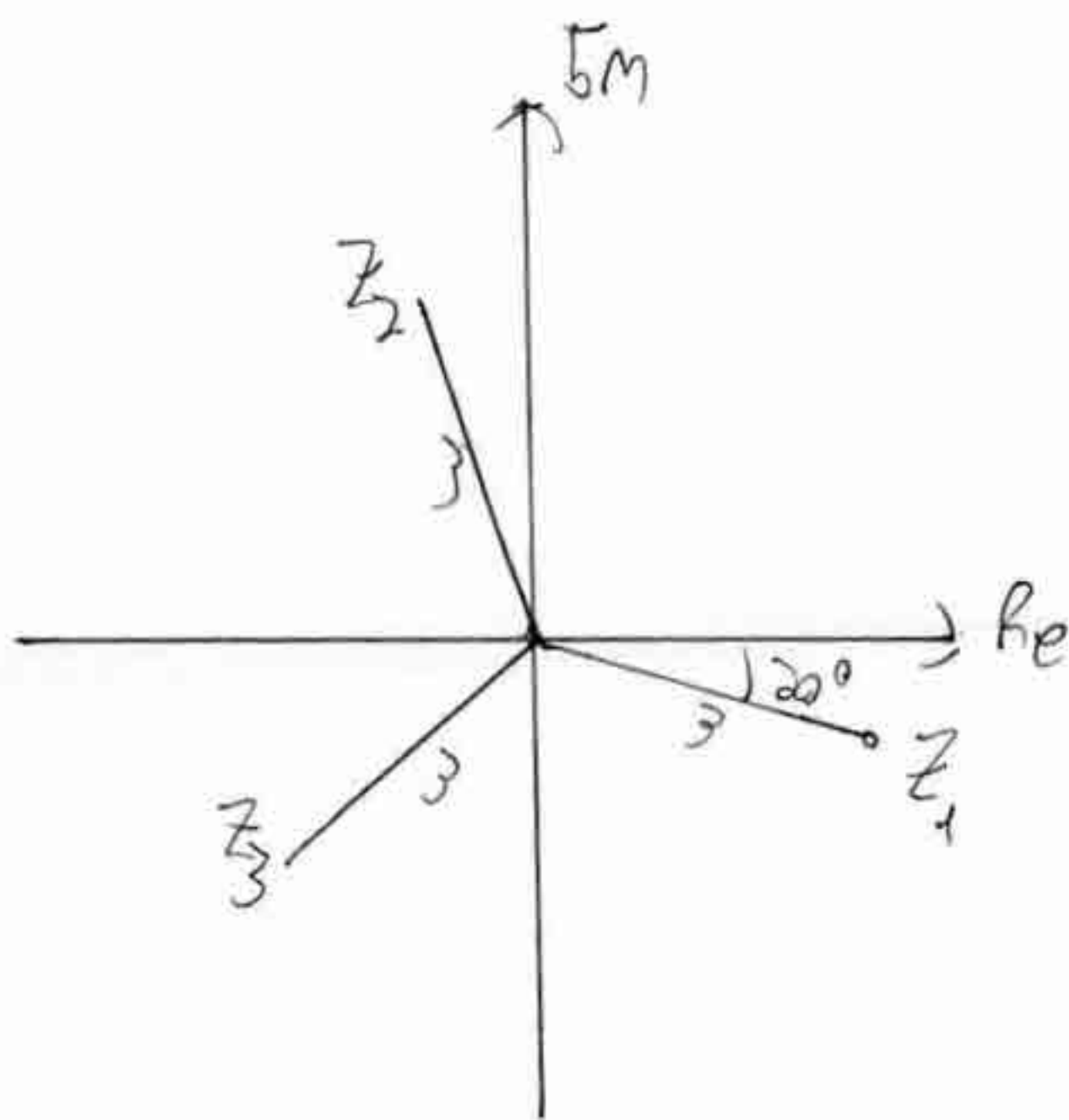
$k=0,1,2$

$$z = 3 e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k)}$$

נמצא את  $z_1, z_2, z_3$

$$z_1 = 3 e^{i(-\frac{\pi}{9})} \quad z_2 = 3 e^{i(\frac{5\pi}{9})} \quad z_3 = 3 e^{i(\frac{11\pi}{9})}$$

IV רביע







התבונן ב-134  
אם

$$y = \sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{\frac{11}{4}}$$

2. שרטט את הפונקציה:

תוך ציון תחומי הגדרה, רציפות וגזירות ובמידה וקיימים, אפסים, נקודות קיצון, נקודות סינגולריות ואסימפטוטות.

ת.ת.גזירה:  $x > \frac{1}{2}$   
צירי קדם התחום

ת.ת.גזירה  
 $x^2 - x + 3 \geq 0$   
 $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$   
אין פתרונות  
מכאן שהפונקציה מוגדרת לכל  $x$ .

$$x^2 - x + 3 = \frac{11}{4}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{11}{4}} \approx 0.07$$

$$(0, 0.07)$$

ק.ר.מ:

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}$$

המכנה תמיד חיובי

$$y' = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

נקודה

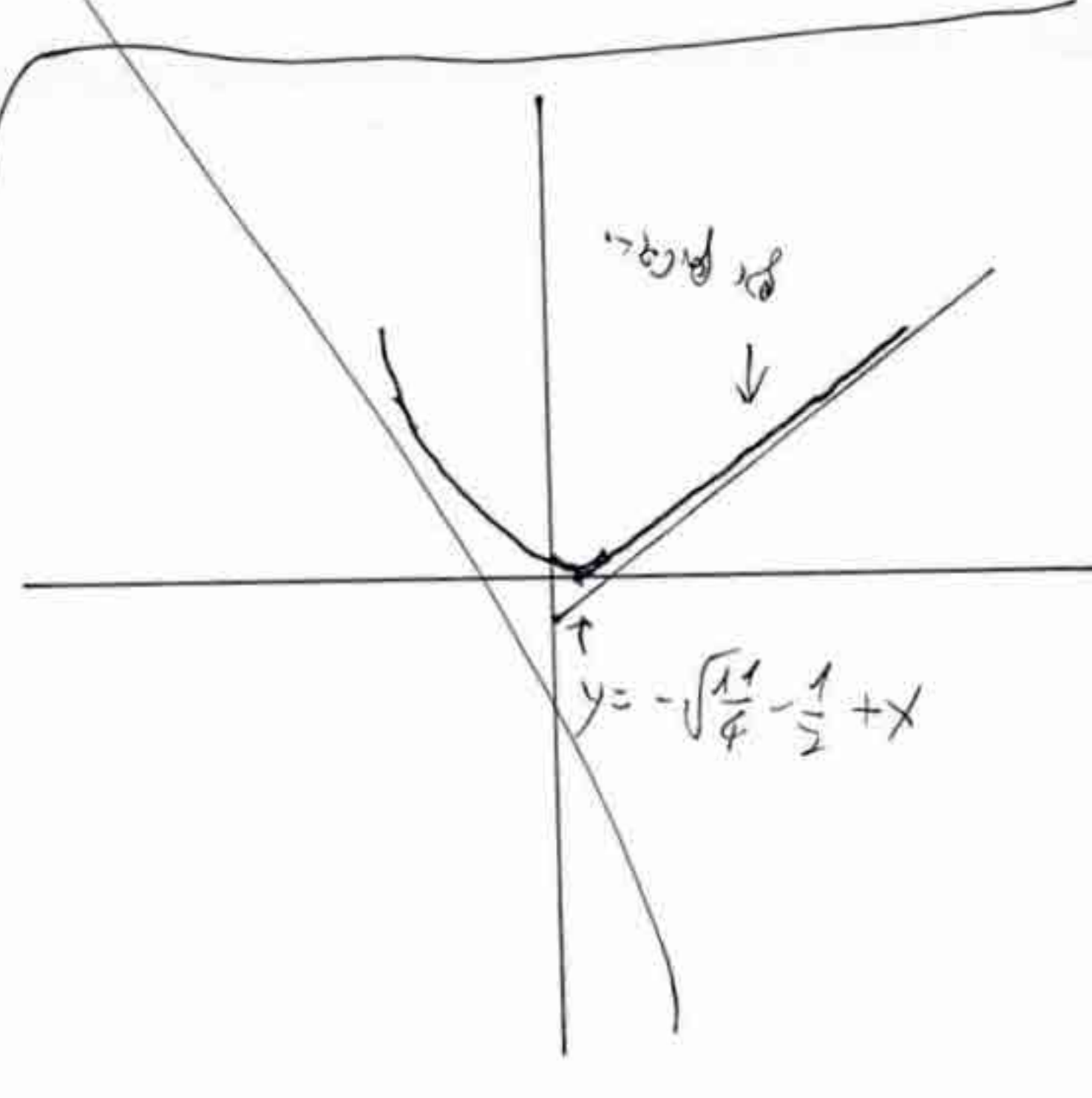
אסימפטוטה

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{\frac{11}{4}}}{x} = \sqrt{1 - 0 + 0} - 0 = 1$$

$$c_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{\frac{11}{4}} - x \right) = -\sqrt{\frac{11}{4}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x} = -\sqrt{\frac{11}{4}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 3}{x(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1)} = -\sqrt{\frac{11}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$c_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{\frac{11}{4}} - x \right) = +\infty$$

אין אסימפטוטה קרי,  $y \rightarrow \infty$







קריטריון

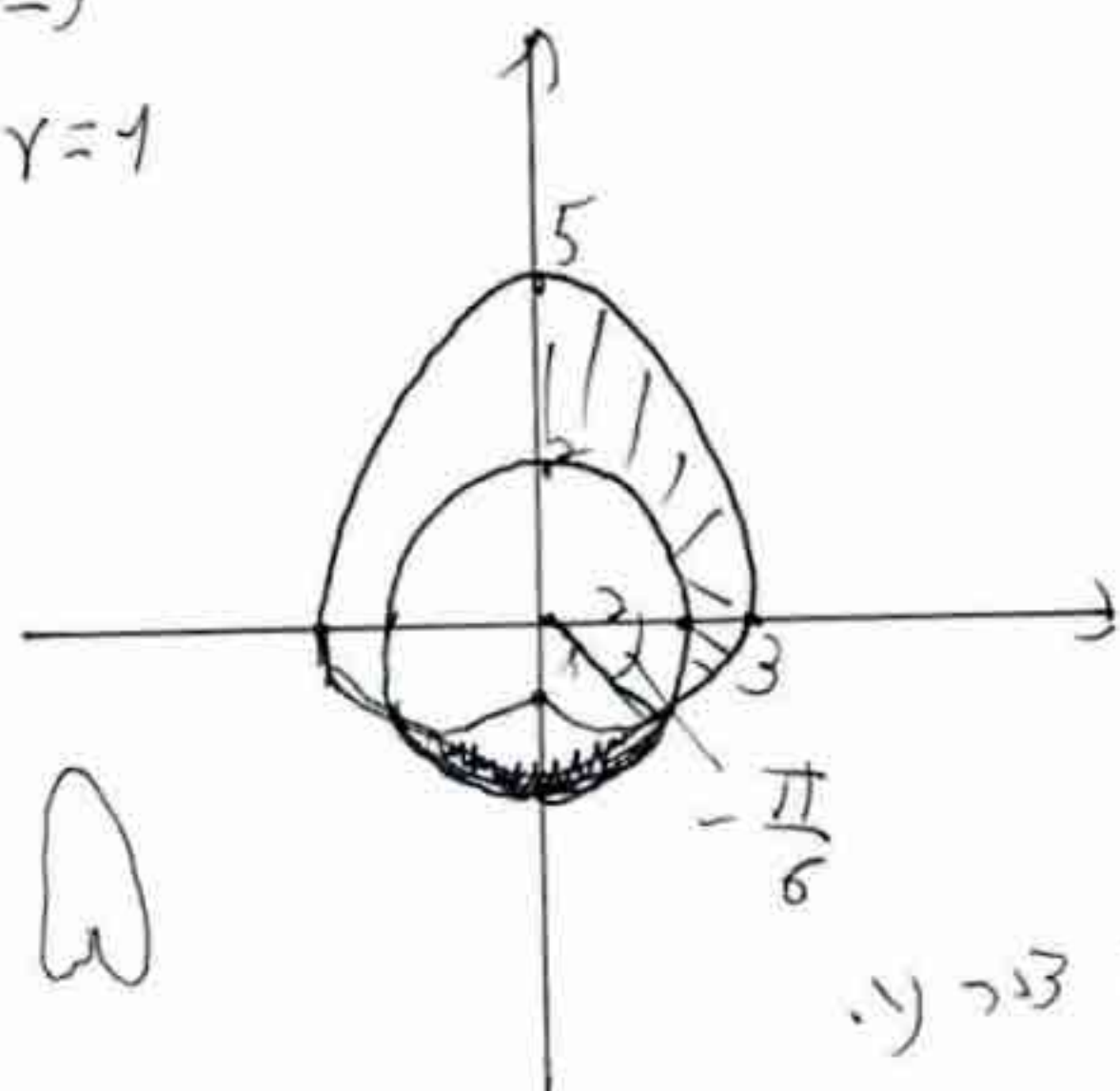
מצאו את השטח הכלוא בתוך  $\rho = 3 + 2 \sin \phi$  ומחוץ ל-  $\rho = 2$  (כאשר  $\phi$ ,  $\rho$  קואורדינטות פולריות).

3.

$\phi = 0 \rightarrow r = 3$

$\phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow r = 5$

$\phi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow r = 1$



נמצא חיתוך:  $\phi = 0$  ו-  $\phi = \frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{2} = 5$

$-\frac{\pi}{6} = 4$

$S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_{r=2}^{r=3+2\sin\phi} r dr =$

$= 2 \int d\phi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_2^{3+2\sin\phi} = \int (9 + 12\sin\phi + 4\sin^2\phi - 4) d\phi =$

$= \left[ 5\phi - 12\cos\phi + 2\phi - \sin 2\phi \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$

$\int 4\sin^2\phi d\phi = \int 2(1 - \cos 2\phi) d\phi = 2\phi - \sin 2\phi$

$\sin^2\phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}$

$= \frac{7\pi}{2} - 12 \cdot 0 - 0 - \left( -\frac{7\pi}{6} - 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{28\pi}{6} + \frac{11\sqrt{3}}{2} = \frac{14}{3}\pi + \frac{11}{2}\sqrt{3}$





חשבו את האינטגרל הבלתי-מסוים הבא:  $\int \frac{x-3}{x^4-x^2} dx$  (4)

$$\int \frac{x-3}{x^2(x^2-1)} dx = \int \left( \frac{-x+3}{x^2} + \frac{x-3}{x^2-1} \right) dx = -\ln x - \frac{3}{x} + \ln|x+1| + 2 \tanh^{-1} x + C$$

$$\frac{ax+b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2-1} = \frac{x-3}{x^2(x^2-1)}$$

$$ax^3 - ax + bx^2 - b + cx^3 + dx^2 = x - 3$$

$$\begin{aligned} a+c &= 0 \\ b+d &= 0 \\ -a &= 1 \rightarrow a = -1 \\ -b &= -3 \rightarrow b = 3 \rightarrow d = -3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \int \frac{-x+3}{x^2} dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{3}{x^2} dx = -\ln x - \frac{3}{x}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{x-3}{x^2-1} dx = \int \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{-2}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1-x^2} dx = \ln|x+1| + 2 \tanh^{-1} x$$





פתרו את המשוואה: (5)  $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = \arctan(x)$

נניח  $y' + 2y = \frac{\tan^{-1}x}{e^{2x}}$  (6)  
(7)

✓  $\mu = e^{\int p dx} = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$

✓  $y = \frac{1}{\mu} \int q \mu dx = \frac{1}{e^{2x}} \int \frac{\tan^{-1}x}{e^{2x}} dx = \frac{1}{e^{2x}} \left( x \tan^{-1}x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) + C$  (8)

⊗  $\int \tan^{-1}x dx = x \tan^{-1}x - \int \frac{x}{x^2+1} dx = x \tan^{-1}x - \int \frac{du}{2u} = x \tan^{-1}x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

✓  $u = \tan^{-1}x$   $du = \frac{1}{x^2+1} dx$   
 $u = x$   $du = dx$   
 $u = x^2+1$   $du = 2x dx$

$\frac{13}{13}$





6. פתרו את המשוואה:  $\arcsin(y) = -\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} y' - y \cos(x) - y' \sin(x)$

$$(M_y + y \cos x) dx + dy \left( \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \sin x \right) = 0$$

$M$   $N$

$$M_y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \cos x \quad N_x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \cos x \quad \checkmark$$

$N_x = M_y$  נדרש

$$\psi(x, y) = \int M dx = \int (\sin^{-1} y + y \cos x) dx = \sin^{-1} y \cdot x + y \sin x + g(y)$$

$$\psi(x, y) = \int N dy = \int \left( \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \sin x \right) dy = x \sin^{-1} y + y \sin x + f(x)$$

$$\psi(x, y) = x \sin^{-1} y + y \sin x + C = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{13}{13}$$





פתרו את המשוואה:

$$\cos(x) \sqrt{[\sin(x) + 3][\sin(x) + 1]} y \ln(y^4) y' = 1 - \sin^2(x)$$





פתרו את המשוואה:

8.

$$(5y - x^2 y^3) dx + (x^3 y^2 - 5x) dy = 0$$

$$y(5 - x^2 y^2) dx + x(x^2 y^2 - 5) dy = 0$$

נניח  $v = xy$   
 $\frac{v}{x} = y$

$$dy = \frac{x dv - v dx}{x^2}$$

$$\frac{v}{x}(5 - v^2) dx + x(v^2 - 5) \left( \frac{x dv - v dx}{x^2} \right) = 0$$

~~$$(5 - v^2) dx - (v^2 - 5) \left( \frac{v dx - x dv}{x} \right) = 0$$~~

~~$$v dx = x dv$$~~

$$(5v - v^3) dx + (v^2 - 5) x dv + dx(5v - v^3) = 0$$

$$2v(5 - v^2) dx = -x(v^2 - 5) dv$$

$$2v dx = x dv$$

כלן (באמצעות)  
 $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{2v}$

$$\ln|x| + C = \frac{1}{2} \ln|v|$$

$$\ln|x| + C = \frac{1}{2} \ln|xy|$$

$$C = \ln \bar{c}$$

$$\ln|\bar{c}x| = \ln(\sqrt{xy})$$

$$\bar{c}x = \sqrt{xy}$$

$$\frac{(\bar{c}x)^2}{x} = y$$

$$y = \bar{c}x$$

$$y' = \bar{c}$$

$$v^2 - 5 = 0$$

זק פתרון כ

$$v^2 - 5 = 0$$

$$\frac{13}{13}$$

$$5\bar{c}x - \bar{c}^3 x^5 + (\bar{c}^2 x^5 - 5x) y' = 0$$

$$5\bar{c}x - \bar{c}^3 x^5 + \bar{c}^3 x^5 - 5\bar{c}x = 0 \checkmark$$





אורך עקומה:  $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

הצגה פרמטרית:  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$

נגזרות:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \Leftarrow f(x, y) = 0$

למשל  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \Leftarrow f(x, y, z) = 0$

$\frac{\partial x_5}{\partial x_1} \Big|_{x_2, x_3} = -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{x_1, x_4, x_6}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x_5, x_4, x_6}\right)} \begin{cases} F(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0 \\ G(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0 \\ H(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0 \end{cases}$

יעקוביאן:  $J\left(\frac{F, G}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$

דטרמיננטות:  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

מקס/מיני של  $f(x, y)$ :  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$   
אוקף של  $f(x, y)$ :  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$

#### קוטביות

$x = r \cos(\varphi)$

$y = r \sin(\varphi)$

$J\left(\frac{x, y}{r, \varphi}\right) = r$

#### כדוריות

$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$

$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$

$z = r \cos(\theta)$

$J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \varphi}\right) = r^2 \sin(\theta)$

#### קואורדינטות:

#### גליליות

$x = r \cos(\varphi)$

$y = r \sin(\varphi)$

$z = z$

$J\left(\frac{x, y, z}{r, \varphi, z}\right) = r$

פונקציות היפרבוליות:  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  נגזרת לוגריתמית:

$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{1}{f} \frac{df}{dx}$

אסימפטוטה:  $f(x) \rightarrow y = kx + b$

$b = \lim(f - kx); \quad k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f}{x}\right)$

טור טיילור:

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k}{dx^k} f\right)_{x=x_0}$

$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ (x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0)$

הצבות המפשטות אינטגרלים:

#### הצבה

#### ביטוי

1.  $x = \sin u \quad \sqrt{1-x^2}$

2.  $x = \frac{1}{\cos u} \quad \sqrt{x^2-1}$

3.  $x = \tan u \quad \sqrt{1+x^2}$

4.  $\left. \begin{aligned} \sin x &= \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ u &= \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ dx &= \frac{2du}{1+u^2} \end{aligned} \right\} \sin(x), \cos(x)$

טכניקות אינטגרציה:

• השלמה לריבוע

• שברים חלקיים

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(ax+b)^r} + \frac{Bx+C}{(dx^2+ex+f)^r} + \dots$

• אינטגרציה בחלקים

$\int fg' dx = fg - \int f'g dx$

$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$





גזירה מתחת לאינטגרל:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx + f(u_2, \alpha) \frac{du_2}{d\alpha} - f(u_1, \alpha) \frac{du_1}{d\alpha}$$

מרכז מסה: כאשר  $\rho$  הצפיפות

$$X_{CM} = \frac{\iiint \rho x dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz} ; Y_{CM} = \dots ; Z_{CM} = \dots$$

מומנט התמד: כאשר  $r_z$  המרחק מציר  $z$  ( $r_z^2 = x^2 + y^2$ )

$$I_z = \iiint r_z^2 \rho dx dy dz$$

נוסחאות Euler ו de Moivre:

$$Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$$

$$Z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\ln Z = \ln r + i(\varphi + 2\pi n) ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$Z_1^{Z_2} = e^{(\ln Z_1) Z_2}$$

נוסחאות טריגונומטריות

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$1 + \tan^2 x = 1 / \cos^2 x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 = 2 \sinh^2 x + 1$$

נגזרות:

$f(x)$	$\frac{df}{dx}$	$f(x)$	$\frac{df}{dx}$	$f(x)$	$\frac{df}{dx}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$e^x$	$e^x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$			$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\log_a x$	$\log_a e \frac{1}{x}$			$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$a^x$	$a^x \ln a$				





משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון:

הפרדת משתנים:  $g(y)dy = f(x)dx$

לינארית סדר ראשון:  $y' + p(x)y = g(x)$ ;  $\mu = e^{\int p dx}$ ;  $y = \frac{1}{\mu} \int g\mu dx$

**Bernoulli**:  $y' + p(x)y = q(x)y^n$ ; **הצבה**:  $v(x) = y^{1-n}$

**Ricatti**:  $y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$ ; פתרון  $y_1$

**הצבה**:  $y(x) = y_1(x) + 1/v(x)$

הומוגניות:  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ;  $M$  ו  $N$  פונקציות הומוגניות מאותה

דרגה (או)  $\left(\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ ; **הצבה**:  $v = y/x$

לינארית לא הומוגנית:  $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

**טרנספורמציה**:  $x_1 = x - x_0$   $y_1 = y - y_0$

מדוייקת:  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ; מתקיים:  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

לא מדוייקת: גורם אינטגרציה  $m(x,y)$

$\mu = e^{\int f(x)dx} \Leftrightarrow f(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$

$\mu = e^{-\int g(y)dy} \Leftrightarrow g(y) = \frac{M_y - N_x}{M}$

$y \cdot f(x \cdot y)dx + x \cdot g(x \cdot y)dy = 0$

**הצבה**:  $v = xy$

