

החוג לניהול

1221.5111 - מתמטיקה לניהול
בחינת סוף סמסטר א' תשע"ו – מועד א'
ד"ר תמר מרגלית

ת.ז. _____

בחינה לא חסויה!

תאריך הבחינה: 19.1.16

משך הבחינה: 3 שעות

מספר עמודים בבחינה: 3 (כולל עמוד זה).

חומר עזר: מותר השימוש בדף נוסחאות המצורף לבחינה, דף עזר אישי, ומחשבון לא גרפי.

הוראות:

הבחינה מורכבת מ- 2 חלקים, יש לענות על 2 השאלות בחלק א' ועל 3 שאלות בחלק ב'
משקל כל שאלה מצוין ליד כל שאלה.
יש לענות במחברת.

בהצלחה!

בתום הבחינה יש להקפיד ולמסור למשגיחה (באופן אישי) את כל מחברות הבחינה.
על התלמיד להמתין עד אשר תסמן המשגיחה כי החזיר את כל המחברות,
(כולל ציון מספר המחברות), השאלון ודף התשובות.

הוראות חשובות לצורך סריקת מחברת הבחינה:

- יש להימנע מכתובה בעט ירוק או בעפרון
- בדפי התשובות אין לכתוב בתחום השוליים הימניים (מימין לקו).

© כל הזכויות שמורות.

מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכנית
ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1 (חובה) (28 נק')

חקור/י את הפונקציה ושרטט/י סכמטית את גרף הפונקציה $y = \frac{x-4}{x^2-3x}$

יש להתייחס לתחומי הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, זוגית/אי-זוגית או כללית, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות.

שאלה 2 (חובה) (18 נק')

העלות השולית בייצור x יחידות מוצר היא: $MC(x) = 6x^2 + 50$

המפעל מוכר כל יחידה ב-200 ש"ח.

מה הכמות שעל הייצורן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

יש לבחור 3 שאלות מבין השאלות 3-6 (כל שאלה 18 נק')

שאלה 3

* אין קשר בין סעיפי השאלה

א. חשבו/י את הגבול: $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$

ב. חשבו/י את השטח התחום ע"י הפונקציה $f(x) = \min\{x+1, 2x\}$ וציר x בתחום

$0 \leq x \leq 2$ בשתי דרכים:

1. על ידי חישוב שטחים גיאומטריים, בליווי שרטוט מתאים.

2. על ידי חישוב אינטגרלים

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. שרטט/י מפת עקומות שוות ערך. ציין/י באיזה כיוון יש לזוז מעקומה לעקומה על מנת

להגדיל את הערך של f .

ג. חשבו/י את השיפוע בנקודה $(1,1)$, וציין/י מה המשמעות שלו.

ד. חשבו/י את f_{xy} .

שאלה 5

א. פתור/י את מערכת המשוואות על ידי שיטת גאוס (יש להגיע למטריצת מדרגות קנונית)

$$x - y + z = 1$$

$$5x - 7y + 7z = 0$$

$$3x - 2y + z = 2$$

ב. נתונה מערכת המשוואות:

$$2x - 2y + 2z = 3$$

$$5x - 7y + 7z = 4$$

$$3x - 2y + z = 6$$

בחר את התשובה הנכונה, ונמק/י על סמך סעיף א', מבלי לבצע חישובים נוספים:

1. למערכת המשוואות בסעיף ב' אין פתרון
2. למערכת המשוואות בסעיף ב' יש פתרון יחיד
3. למערכת המשוואות בסעיף ב' יש אינסוף פתרונות

שאלה 6

* אין קשר בין סעיפי השאלה

א. בדוק/י האם קבוצת הוקטורים הבאה תלויה לינארית. נמק/י ופרט/י חישוביך:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ב. נתונה מטריצה A המקיימת:

$$A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ -48 & 16 \end{pmatrix}$$

חשבו/י את A^2 בעזרת חישוב מטריצה הופכית מתאימה.

נוסחאות כלליות

נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

שורשים -

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{משוואה ריבועית:}$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{פירוק לגורמים -}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

טריגונומטריה:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

חזקות ולוגריתמים:

לכל $0 < a, b \neq 1$ התנאים הבאים שקולים:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

ומתקיים:

$$\log_a(a^x) = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\log_a(1/x) = -\log_a x$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

גבולות

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x} = 0 \quad \text{וכן} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{c}{x} = \pm\infty$$

לכל קבוע $c > 0$ מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

נגזרות

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

אינטגרלים

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{אם } F'(x) = f(x) \text{ אז}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{אם } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\begin{pmatrix} u = u(x) \\ du = u'(x) dx \end{pmatrix}$$

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \left(\int f(u) du \right) (u(x))$$

שיטת ההצבה

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

אינטגרציה בחלקים

טור טיילור

קרוב טיילור מסדר k ל- $f(x)$ סביב הנקודה x_0 הינו הבטוי

$$f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

פונקציות בשני משתנים

משפט הפונקציה הסתומה: אם $F(x, y, z) = 0$ אז $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$

מציאת נקודות קיצון/אוכף: תהי (a, b) נקודה חשודה $f'_y(a, b) = f'_x(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) = f'_x(a, b) = 0$

נסמן: $B = f'_{xy}(a, b) = f'_{yx}(a, b)$, $A = f'_{xx}(a, b) = f'_{xx}(a, b)$

$\Delta = AC - B^2$, $C = f'_{yy}(a, b) = f'_{yy}(a, b)$

אם $\Delta > 0$ ו- $A, C > 0$ אז (a, b) נקודת מינימום,

אם $\Delta > 0$ ו- $A, C < 0$ אז (a, b) נקודת מקסימום,

אם $\Delta < 0$ אז (a, b) נקודת אוכף.

שיטת כופלי לאגראנז': הנקודה (a, b) הינה קיצון לפונקציה $f(x, y)$ תחת האילוץ $g(x, y) = k$

אם כשמגדירים $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k)$

אז קיים λ שעבורו מתקיימים (1)+(2):

$$L'_x(a, b) = f'_x(a, b) - \lambda \cdot g'_x(a, b) = f'_x(a, b) - \lambda \cdot g'_x(a, b) = 0 \quad (1)$$

$$L'_y(a, b) = f'_y(a, b) - \lambda \cdot g'_y(a, b) = f'_y(a, b) - \lambda \cdot g'_y(a, b) = 0$$

$$g(a, b) = k$$

$$\Delta = 2g'_x g'_y L''_{xy} - [(g'_x)^2 L''_{yy} + (g'_y)^2 L''_{xx}] = 2g'_x g'_y L''_{xy} - (g'_x)^2 L''_{yy} - (g'_y)^2 L''_{xx} \quad (2)$$

אז אם $\Delta > 0$ יש מקסימום מקומי ואם $\Delta < 0$ יש מינימום מקומי.

$$\Delta = (f''_{xx} - \lambda g''_{xx})(g'_y)^2 + (f''_{yy} - \lambda g''_{yy})(g'_x)^2 - 2(f''_{xy} - \lambda g''_{xy})g'_x g'_y \quad (2)$$

אז אם $\Delta < 0$ יש מקסימום מקומי ואם $\Delta > 0$ יש מינימום מקומי.

אלגברה לינארית

הפיכות - מטריצה ריבועית A היא הפיכה (רגולרית) אם קיימת מטריצה A^{-1} שעבורה

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

. A^{-1} נקראת המטריצה ההפוכה למטריצה A .

$$\text{מתקיים: } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (A')^{-1} = (A^{-1})' \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

שיטה למציאת המטריצה ההפוכה: על-ידי פעולות שורות אלמנטריות מעבירים את $(A|I)$

לצורה $(I|B)$, B שמקבלים היא המטריצה ההפוכה ל- A .

שחלוף - המטריצה A' היא המטריצה ששורותיה הן עמודות המטריצה A .

$$\text{מתקיים: } (A')' = A \quad (AB)' = B' A' \quad \text{rank}(A') = \text{rank}(A)$$

דרגה - $\text{rank}(A)$ הוא מספר השורות שאינן שורות אפסים, לאחר שבוצע חילוף גאוס מלא על A .
דטרמיננטה - מספר המחושב עבור מטריצה ריבועית באופן הבא:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

מערכת משוואות של m משוואות ב- n נעלמים ניתנת בכתוב מטריונאלי ע"י $A\underline{x} = \underline{b}$,

כאשר $A_{m \times n}$ המטריצה המצומצמת של המקדמים.

מסמנים: $A' = (A|b)$ מטריצת המקדמים המורחבת של המערכת,

$$r = \text{rank}(A), \quad r' = \text{rank}(A') \quad \text{הדרגות של המטריצות המתאימות (תמיד } r \leq r')$$

$$r \neq r' \Leftrightarrow \text{למערכת אין פתרון,}$$

$$r' = r < n \Leftrightarrow \text{למערכת יש אינסוף פתרונות,}$$

$$r' = r = n \Leftrightarrow \text{למערכת יש פתרון יחיד.}$$

צירוף לינארי של הוקטורים $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ הוא סכום מהטיפוס $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k$,

כאשר $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ הם סקלרים כלשהם.

תלות לינארית - קבוצת וקטורים $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k\}$ תלויה לינארית \Leftrightarrow קיימים סקלרים $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ שלא

כולם אפס המקיימים $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0} \Leftrightarrow$ לפחות אחד מבין הוקטורים הוא צירוף לינארי של האחרים.

אפיון מטריצות הפיכות - מטריצה ריבועית $A_{n \times n}$ היא הפיכה (רגולרית) $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ שקולת שורות

ל- $I \Leftrightarrow$ שורות (עמודות) A בלתי תלויות לינארית $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ לכל וקטור \underline{b} למערכת

$$A\underline{x} = \underline{b} \text{ יש פתרון יחיד } \Leftrightarrow \text{למערכת } A\underline{x} = \underline{0} \text{ פתרון יחיד: } \underline{x} = \underline{0}.$$

הבחינה נסרקה בתאריך 1/2/16

ניתן לערער תוך 14 יום

מיום הסריקה

מחברת מס' _____
מתוך _____ מחברות

27

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים) לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.

3. אין להחזיק טלפונים ניידים או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.

4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.

5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.

6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.

7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת ואת השאלון, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וצינונו יהיה "ס".

8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.

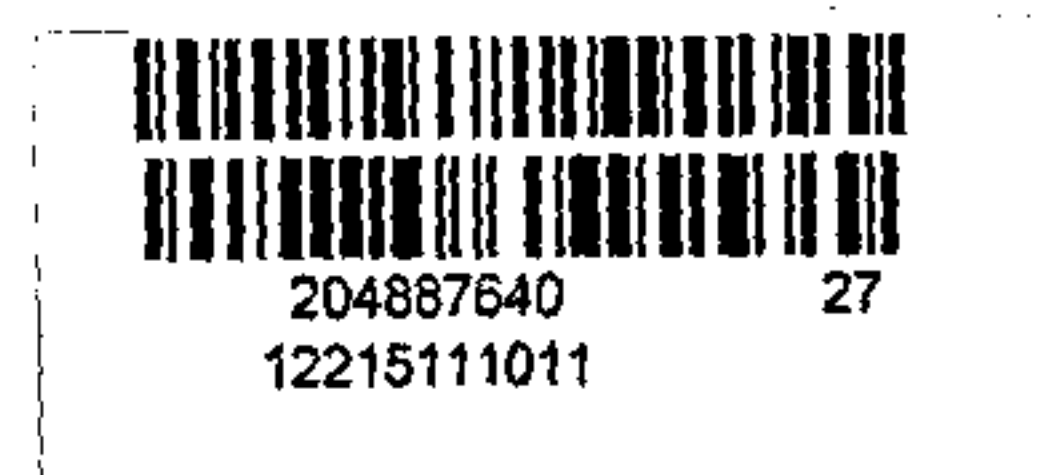
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.

10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.

11. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

תאריך הבחינה 19-1-16
שם הקורס יסודות פסיכיאטריה (ניסח)
שם המורה ד"ר אסתר
החוג/המגמה ניסח

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)
2 | 0 | 4 | 8 | 8 | 7 | 6 | 4 | 0



לשימוש המורה הבוחן:

הציון _____
המחברת נבדקה ביום _____
חתימת המורה _____

4503080

$$y = \frac{x-4}{x^2-3x}$$

$$x^2-3x \neq 0$$

$$x(x-3) \neq 0$$

$$x \neq 0, 3$$

הגדרה

הפונקציה חסומה בקטע

נקודות חסומות: $x=0 \rightarrow$ הפונקציה אינה מוגדרת (אסמטוטה)

$$y=0 \rightarrow \frac{x-4}{x^2-3x} = 0 \rightarrow x=4$$

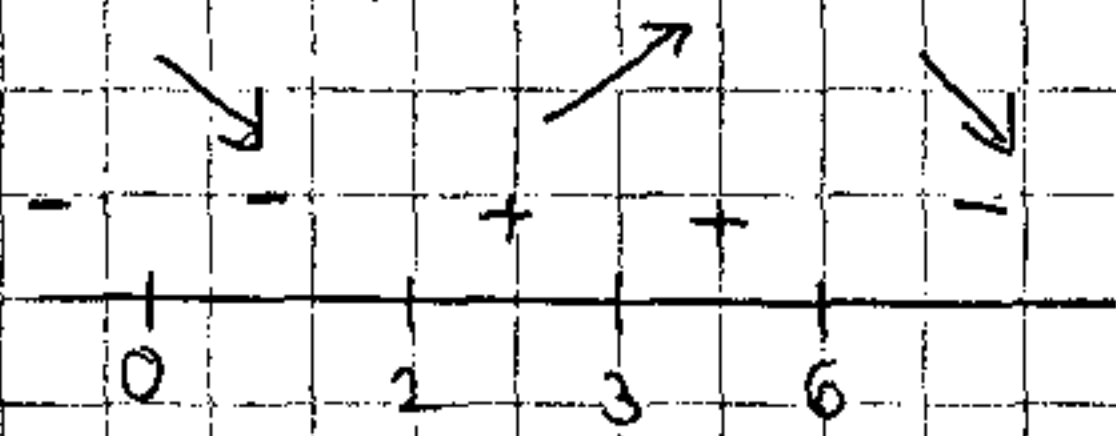
נקודות חסומות: $(4,0)$

באינסוף / אסימטוטה

בבדיקת נקודות חסומות, הפונקציה איננה זוגית או אי-זוגית, ולכן נבדוק נקודות חסומות (מכיוון שהיא מוגדרת בקטע):
 $x=1 \rightarrow f(x) = \frac{1-4}{1^2-3 \cdot 1} = \frac{-3}{-2} = 1.5$
 $x=-1 \rightarrow f(-1) = \frac{-1-4}{(-1)^2-3(-1)} = \frac{-5}{4} = -1.25$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\neq f(-x) \\ -f(x) &\neq f(x) \end{aligned} \right\} \text{הפונקציה איננה זוגית או אי-זוגית}$$

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2-3x) - (x-4)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$



$$y' = \frac{x^2-3x-2x^2+3x+8x-12}{(x^2-3x)^2}$$

$$y' = \frac{-x^2+8x-12}{(x^2-3x)^2}$$

נקודות חסומות: $(2,1) \min$ ו- $(6, \frac{1}{9}) \max$
 קטע $x < 2$ או $6 < x$: הפונקציה יורדת
 קטע $2 < x < 6$: הפונקציה עולה

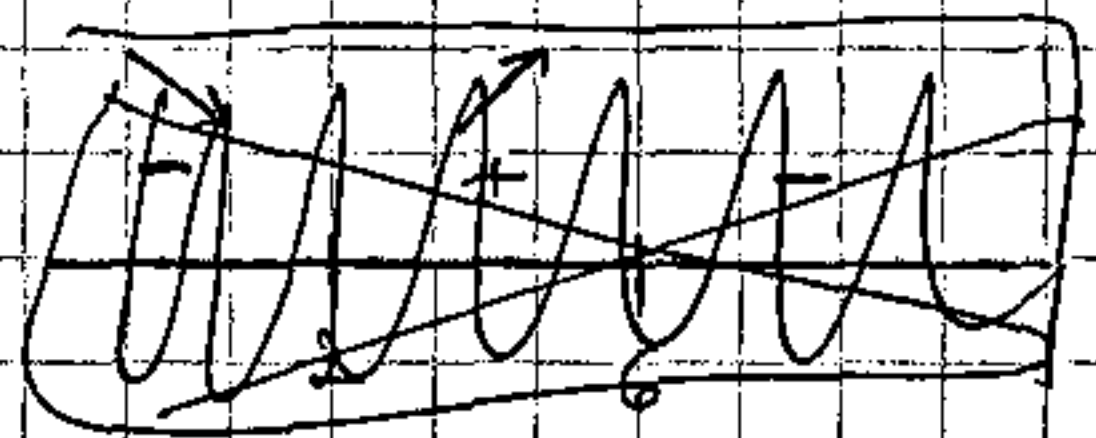
$$y'=0 \rightarrow -x^2+8x-12=0$$

$$x^2-8x+12=0$$

$$\frac{8 \pm \sqrt{8^2-4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$x=2, y=1$$

$$x=6, y=\frac{1}{9}$$



$$y'' = \frac{(-2x+8)(x^2-3x)^2 - (-x^2+8x-12)(2x-3) \cdot 2(x^2-3x)}{(x^2-3x)^4}$$

$$y'' = \frac{(x^2-3x)(-2x+8)(x^2-3x) + (x^2-8x+12)(2x-3) \cdot 2}{(x^2-3x)^4}$$

הפונקציה חסומה בקטע $(0, \infty)$ כי היא מוגדרת בקטע $(0, \infty)$ ויש לה נקודות חסומות.

$$y'' = \frac{(x^2-3x)(-2x^3+6x^2+8x^3-24x+4x^3-6x^2-32x^3+48x+48x-36)}{(x^2-3x)^4}$$

$$y'' = \frac{(x^2-3x)(2x^3-24x^2+72x-36)}{(x^2-3x)^4}$$

$x=2, y''=-\frac{16}{9} < 0 \rightarrow (2,1) \max$
 $x=6, y''=\frac{1}{27} > 0 \rightarrow (6, \frac{1}{9}) \min$

$$2x^3-24x^2+72x-36=0 \quad |:2$$

$$x^3-12x^2+36x-18=0$$

$$x=3, x=0, x=6 \text{ (נקודות חסומות)} \quad (8, \frac{1}{10}) \text{ נקודה}$$

הפונקציה חסומה בקטע $(0, \infty)$ כי היא מוגדרת בקטע $(0, \infty)$ ויש לה נקודות חסומות.
 הפונקציה חסומה בקטע $(0, \infty)$ כי היא מוגדרת בקטע $(0, \infty)$ ויש לה נקודות חסומות.

W/G/G N'ole

$$x=0$$

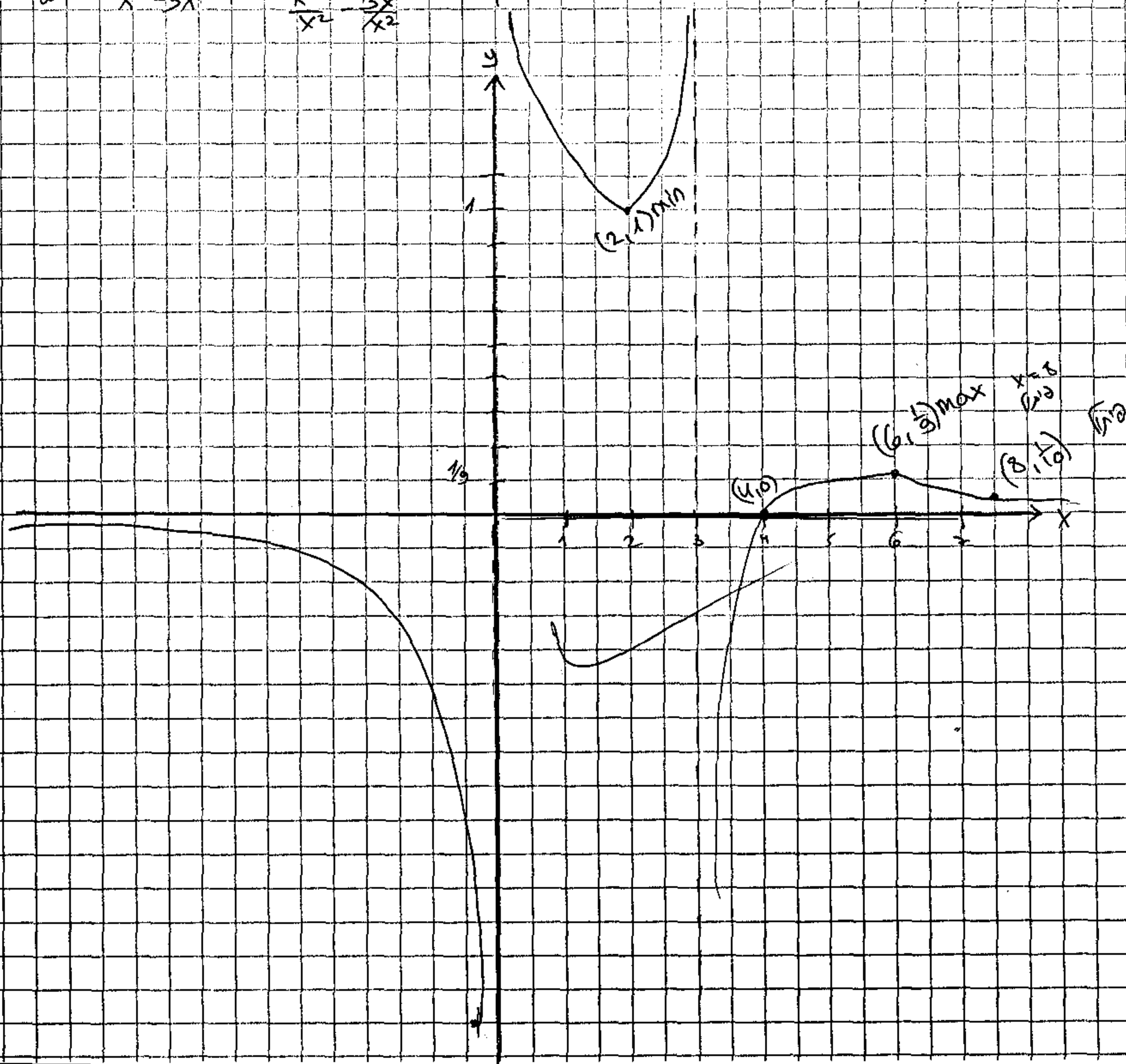
$$x=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} = \frac{x-4}{x(x-3)} = \frac{-1}{3 \cdot 0^+} = -\infty$$

$$x \mapsto 8 \Rightarrow \{ = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad y = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{x^2-3x} = \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$



$$(TC)' = MC = 6X^2 + 50$$

$$P = 200$$

$$q = x \text{ (מ)} \quad \downarrow$$

$$200 \cdot q - TC = \text{רווח מקסימלי}$$

$$\int 6X^2 + 50 \rightarrow TC = \frac{6X^3}{3} + 50X + C \leftarrow \begin{array}{l} \text{אם } C \text{ לא ידוע, נניח } C=0 \\ \text{אם } C \text{ ידוע, נציב אותו} \end{array}$$

$$TC = 2X^3 + 50X$$

$$\pi = 200X - 2X^3 - 50X$$

$$\pi = -2X^3 + 150X$$

$$\pi' = -6X^2 + 150$$

צריך להשוות את שני האיברים

$$\pi = 0 \Rightarrow -6X^2 + 150 = 0$$

$$6X^2 = 150$$

$$X^2 = 25 \quad \sqrt{}$$

$$\underline{X = 5}$$

$$X = -5$$

(הערה: X = -5 אינו פתרון)

מכיוון ש X = 5

נציב את X = 5 ב-π' כדי לוודא שהיא אכן מקסימום

$$\pi'' = -12X = -12 \cdot 5 = -60 < 0$$

max

אם כיצד? X = 5

5 חלק

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 5x - 7y + 7z = 0 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2.5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3.5 \end{array} \right) R_3 \rightarrow -R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} x &= 3.5 \\ y &= 6 \\ z &= 3.5 \end{aligned} \quad (3.5, 6, 3.5)$$

$$3.5 - 6 + 3.5 \stackrel{?}{=} 1 \\ 1 = 1 \checkmark$$

$$\begin{aligned} 5(3.5) - 7(6) + 7(3.5) &\stackrel{?}{=} 0 \\ 17.5 - 42 + 24.5 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \\ 3(3.5) - 2(6) + 3.5 &\stackrel{?}{=} 2 \\ 10.5 - 12 + 3.5 &\stackrel{?}{=} 2 \\ 2 &= 2 \checkmark \end{aligned}$$

נציב במשוואה כדי לוודא פתרון:

במערכת המשוואות מסתבר כי יש פתרון יחיד:

מערך A ניתן ערכיו בעמודים הראשונים של המטריצה (כפי שציינו טבלה) והוא פתרון יחיד למערכת $AX=B$.

ניתן לומר זאת גם בעזרת שטחים המציינים את המטריצה (אנחנו לא ציינו) שהיא הפתרון (עצמית).

$y > 0, x > 0$ הן $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$ (כ) $\frac{4}{3}$ חלק (ב) $\frac{1}{3}$ חלק (ג)

$$y' = \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x^2 - 3x)^2}$$

1 חלק פשוט

$$y'' = \frac{(-2x+8)(x^2-3x)^2 - (-x^2+8x-12) \cdot 2(x^2-3x)(2x-3)}{(x^2-3x)^4}$$

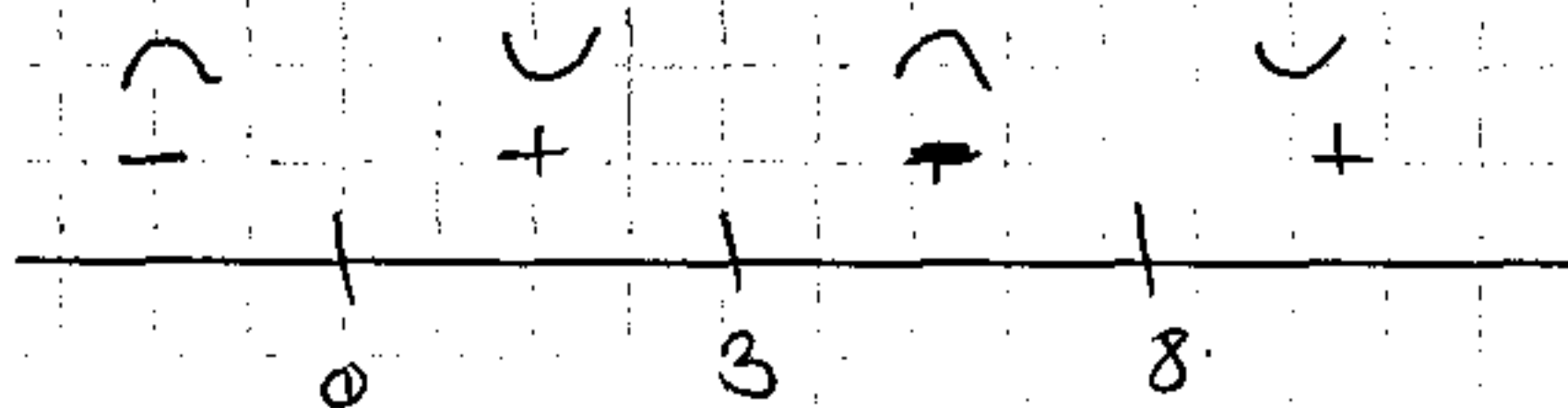
$$y'' = \frac{2(x^2-3x) [(-x+4)(x^2-3x) - (2x-3)(-x^2+8x-12)]}{(x^2-3x)^4}$$

$$y'' = \frac{2(x^2-3x) [-x^3+3x^2+4x^2-12x] - (2x^3+16x-24x+3x^2-24x+36)}{(x^2-3x)^4}$$

$$y'' = \frac{2x(x-3) (-x^3+7x^2-12x+2x^3-36)}{(x^2-3x)^4}$$

~~$y'' = \frac{2x(x-3) (-x^3+7x^2-12x+2x^3-36)}{(x^2-3x)^4}$~~ $y' = \frac{2x(x-3)(x^3+4x^2+20x-36)}{(x^2-3x)^4}$

$y''=0 \rightarrow 2x=0$ ח"כ $x=0$ חלק (א) $x-3=0$ ח"כ $x=3$ חלק (ב) $x^3+4x^2+20x-36=0$ $x=8$ חלק (ג)



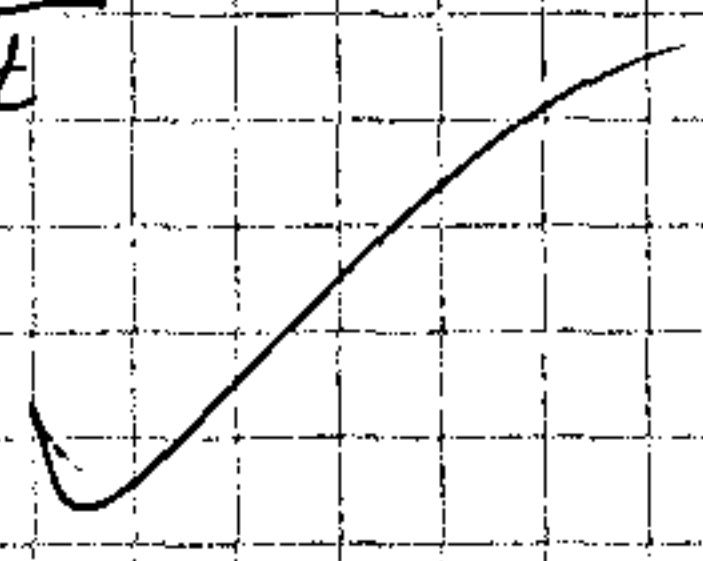
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} \Rightarrow "1 \frac{0}{0}" \rightarrow 1^\infty$$

נניח שיש לנו

$$\begin{aligned} x &= 1+t \\ t &= x-1 \\ t &\rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-1-t} = -\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t)^{-\frac{1}{t}} \Rightarrow \underbrace{\left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{-1}}_e = e^{-1}$$



$$f(x) = \min\{x+1, 2x\}$$

$$0 \leq x \leq 2 \quad x \text{ חיובי}$$

$$y = \min(x+1, 2x)$$

נחשב כמה נק' המינימום של הפונקציה

$$x=0 \rightarrow y = \min(1, 0)$$

$$x=0.5 \rightarrow y = \min(1.5, 1)$$

$$y=0 \quad (0, 0)$$

$$(0.5, 1)$$

$$x=1 \rightarrow y = \min(2, 2) \quad y=2 \quad (1, 2)$$

$$x=1.5 \quad y = \min(2.5, 3) \quad y=2.5 \quad (1.5, 2.5)$$

$$x=2 \rightarrow y = \min(3, 4) \quad y=3 \quad (2, 3)$$

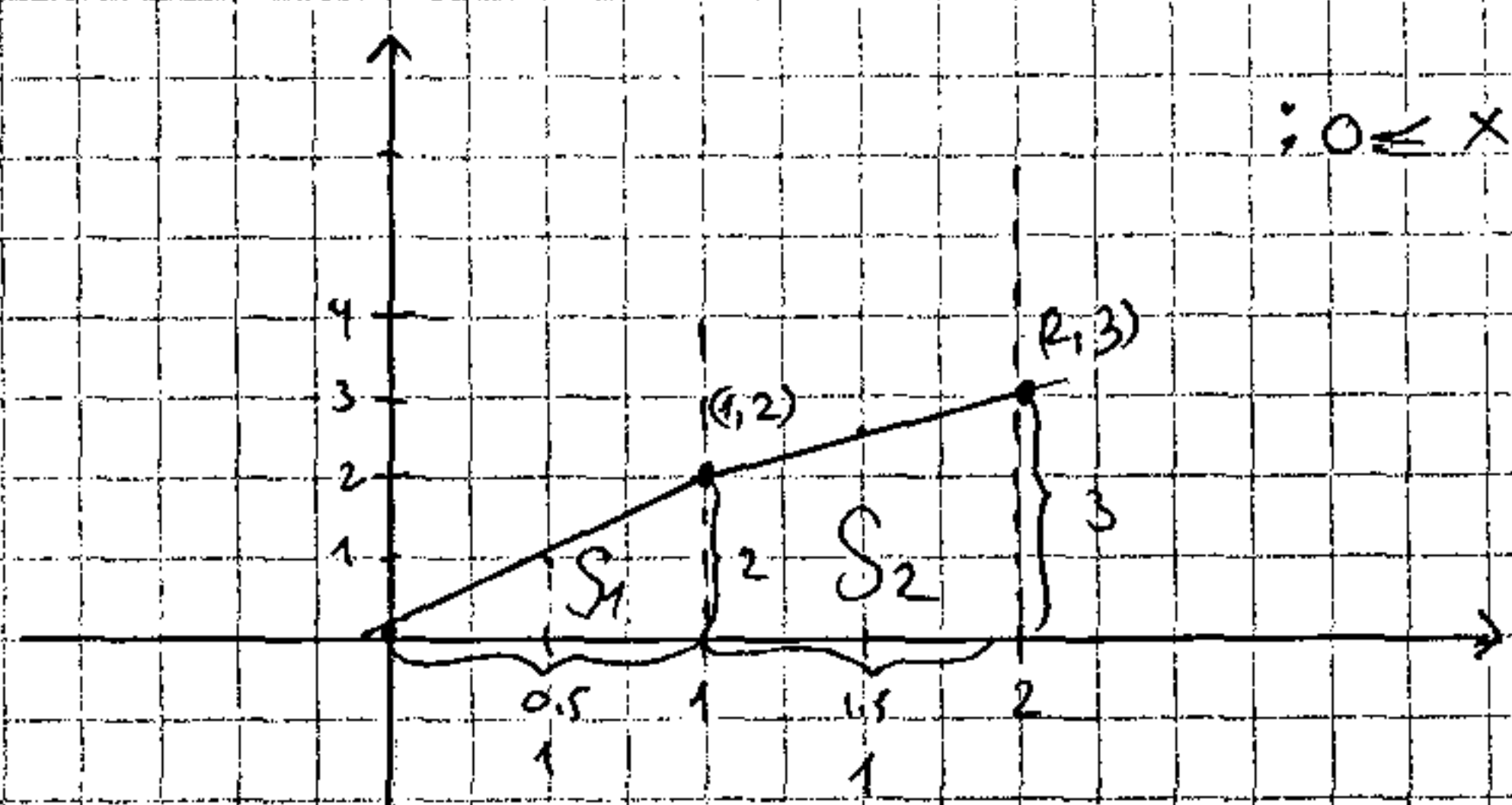
הם שלוש נקודות מינימום פונקציה

$$\begin{aligned} x+1 &< 2x \\ 1 &< x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+1 &> 2x \\ 1 &> x \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x+1 &\text{ מינימום סדר } x < 1 \\ 2x &\text{ מינימום סדר } x > 1 \end{aligned} \right\}$$

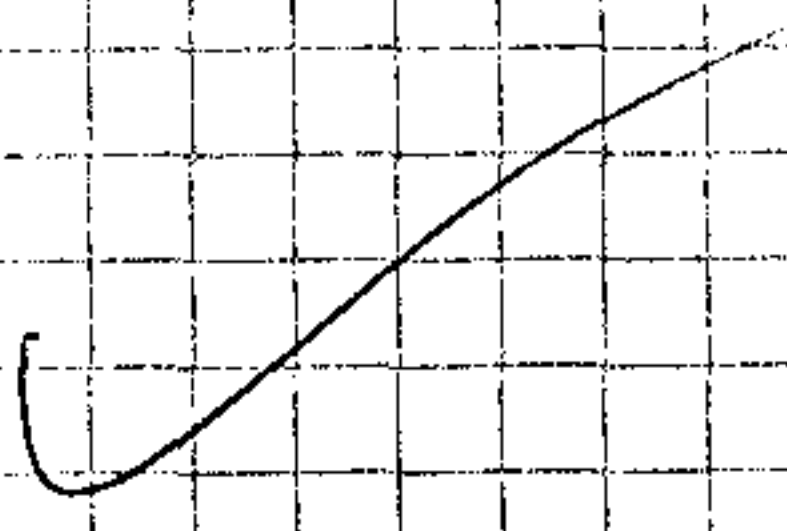
אם כן $x=1$ קיים מינימום של $0 \leq x \leq 2$



$$\text{עבור } S_1 \rightarrow \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$S_1 + S_2 = 1 + 2.5 = 3.5$$

$$\text{סדר } S_2 \rightarrow \frac{(2+3) \cdot 1}{2} = 2.5$$



[illegible]

	אז	אויפבוטעט מל-אביב	אז	אויפבוטעט מל-אביב	אז	אויפבוטעט מל-אביב
--	----	-------------------	----	-------------------	----	-------------------

 את הוֹבְדוּסֵט תל-אביב	 את הוֹבְדוּסֵט תל-אביב	 את הוֹבְדוּסֵט תל-אביב	את הוֹבְדוּסֵט תל-אביב
--	--	--	--

	אין אונברסיטעט תל-אביב		אין אונברסיטעט תל-אביב		אין אונברסיטעט תל-אביב		אין אונברסיטעט תל-אביב		אין אונברסיטעט תל-אביב
---	------------------------	---	------------------------	---	------------------------	--	------------------------	---	------------------------

[illegible]

[illegible]



$$A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ -48 & 16 \end{pmatrix}$$

12

$$A^2 = ?$$

$$A^2 = A^5 \cdot (A^3)^{-1}$$

$$\leftarrow (A^5 = A^2 \cdot A^3 \Rightarrow A^2 = A^5 \cdot A^3 (A^3)^{-1})$$

$$(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \rightarrow -\frac{1}{8}R_1 \\ R_3 \rightarrow -\frac{1}{8}R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} (A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ -48 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{matrix} 16 \cdot 0 + 16 \cdot -\frac{1}{8} = -2 \\ 16 \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot 16 = -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -48 \cdot -\frac{1}{8} + 16 \cdot 0 = 6 \\ -48 \cdot 0 + 16 \cdot (-\frac{1}{8}) = -2 \end{matrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ -48 & 16 \end{pmatrix}$$

ב'קרה: $A^2 \cdot A^3 = A^5$ נכון

✓

הב'קרה נכונה!

בית הדפוס

אוניברסיטת תל-אביב