מבחן באינפי 1

5.3.2010

מרצה: פרופ' ניר סוכן

סמסטר א', מועד ב'

- משך הבחינה 3 שעות
- ללא חומר עזר. ניתן להשתמש במחשבון

בהצלחה

חלק א

יש לפתור שאלה אחת בלבד מתוך 2 השאלות בחלק זה.

1. יש להוכיח או להפריך את הטענות הבאות:

א. (15 נק') יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות.

נתון שעבור כל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N

כך שעבור כל מספר טבעי $N<n$ מתקיים

$$|x_n-y_n|<\varepsilon$$

אזי קיים מספר $\mathbb{R}\ni a$ כך ש

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

ג. (9 נק') יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות.

נתון $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n = a \in [c,d]$

וכמו כן $x_n \neq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב $[c,d]$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(a)$$

2. יש להוכיח או להפריך את הטענות הבאות!

א. (15 נק') תהי $f(x)$ פונקציה המתאפסת באינסוף נקודות בקטע $[a,b]$ אזי $f(x)$ איננה אינטגרבילית.

ג. (10 נק') תהיינה $f(x)$, $g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ אזי קיימת נק' $c \in [a,b]$ כך ש

$$g(c)\int_a^c f(t)\,dt = -f(c)\int_b^c g(t)\,dt$$

חלק ג

יש לפתור 3 שאלות מתוך 4 השאלות בחלק זה

3. חקרו את הפונקציה הבאה (25 נק')

$$f(x) = x - 2\arctan x$$

לפי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, תחומי רציפות, תחומי עליה וירידה, תחומי קמירות כלפי מעלה וכלפי מטה, נקודות קיצון, נקודות פיתול, אסימפטוטות.

שרטטו גרף של הפונקציה.

4. א. (15 נק') חשבו

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - x\sin x - \cos x}{\sin^2 x}$$

ב. (10 נק') תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה של a וגזירה בנקודה a. כמו כן $f(a)>0$.

חשבו:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

5.

א. (15 נק') תהי $f(x)$ רציפה ב $[0,1]$ כך ש $f(x)\in[0,1]$. הוכיחו שעבור כל n טבעי יש למשוואה $f(x)=x^n$ פתרון ב $[0,1]$.

ב. (10 נק') הוכיחו שלמשוואה

$$x^2 = x\sin x + \cos x$$

יש בדיוק שני פתרונות ב $\mathbb{R}$.

6. א. (15 נק')

נתון

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

חשבו

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx$$

ב. (10 נק') חשבו

$$\int_{1}^{2} \frac{2}{x^2}\arctan(1+x)\,dx$$

60

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

תאריך הבחינה 5/3/10
שם הקורס חשבון אינפיניטסימלי 1
שם המורה פרופ' ניר סוכן

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום. 25
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו. 25
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה. 25
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח. 25
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר,יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון ____
המחברת נבדקה ביום ____
חתימת המורה ____

3013017

25
25
25
25

100

יפה מאוד!

$$f(x) = x - 2\arctan x$$ ③

תחום הגדרה: הפונק' מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$ ($\arctan x$ מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$, x מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$).

תחום רציפות: הפונק' רציפה $\forall x\in\mathbb{R}$. ($\arctan x$ פונק' אלמנטרית ורציפה, x פונק' אלמנטרית ורציפה, חיסור פונק' רציפות היא פונק' רציפה).

$$f'(x) = 1 - 2\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

נבדוק מתי הנגזרת מתאפסת ע"מ למצוא נק' הקיצון לפי משפט פרמה).

$$0 = \frac{x^2-1}{1+x^2} \quad /\cdot(1+x^2)$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$f(1) = 1 - 2\arctan 1 = 1 - 2\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(1, 1-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(-1) = -1 - 2\arctan(-1) = -1 - 2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(-1, -1+\frac{\pi}{2}\right)$$

נבדוק תחומי עליה וירידה:

$x<-1$	$-1<x<1$	$1<x$
↗	↘	↗

max (at $x=-1$), min (at $x=1$)

הפונק' עולה: $x<-1$, $1<x$

הפונק' יורדת: $-1<x<1$

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - (x^2-1)2x}{(1+x^2)^2}$$

נבדוק מתי הנגזרת השניה מתאפסת ע"מ למצוא נק' פיתול:

$$f''(x) = \frac{2x + \cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

המשך בעמ' הבא.

$$f''(x)=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$0=\frac{4x}{(1+x^2)^2} \Big/ \cdot (1+x^2)^2$$

$$0=4x$$

נק' פיתול $\underline{x=0}$

$$f(0)=0-2\arctan 0=0 \Rightarrow \underline{(0,0)}$$

תחומי קמירות וקעירות:

$x<0$	$0<x$
$-$	$+$
$\cap$	$\cup$

הפונק' קמורה: $0<x$
הפונק' קעורה: $x<0$

אסימפטוטה אנכית: אין. מכיוון שהפונק' רציפה לכל $\forall x\in\mathbb{R}$.

אסימפטוטה אופקית/משופעת:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}$$

$\arctan x$ הינה פונק' חסומה ע"י $\frac{\pi}{2}$ ב-∞
ו- $-\frac{\pi}{2}$ ב- $-\infty$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}=\text{'}\frac{\infty}{\infty}\text{'}$$

$$\text{לופיטל}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{1+x^2}$$

נחלק ב-x^2

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{1}=\underline{1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}=\text{'}\frac{-\infty}{-\infty}\text{'}$$

כנ"ל לשני

נבדוק את לופיטל, ונקבל את אותו גבול

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{1+x^2}=\underline{1}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \cancel{x} - 2\arctan x - \cancel{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} -2\arctan x \underset{\downarrow}{=} -2\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{-\pi}$$

כיוון ש arctan x שואף ל-$\frac{\pi}{2}$ ב-∞.

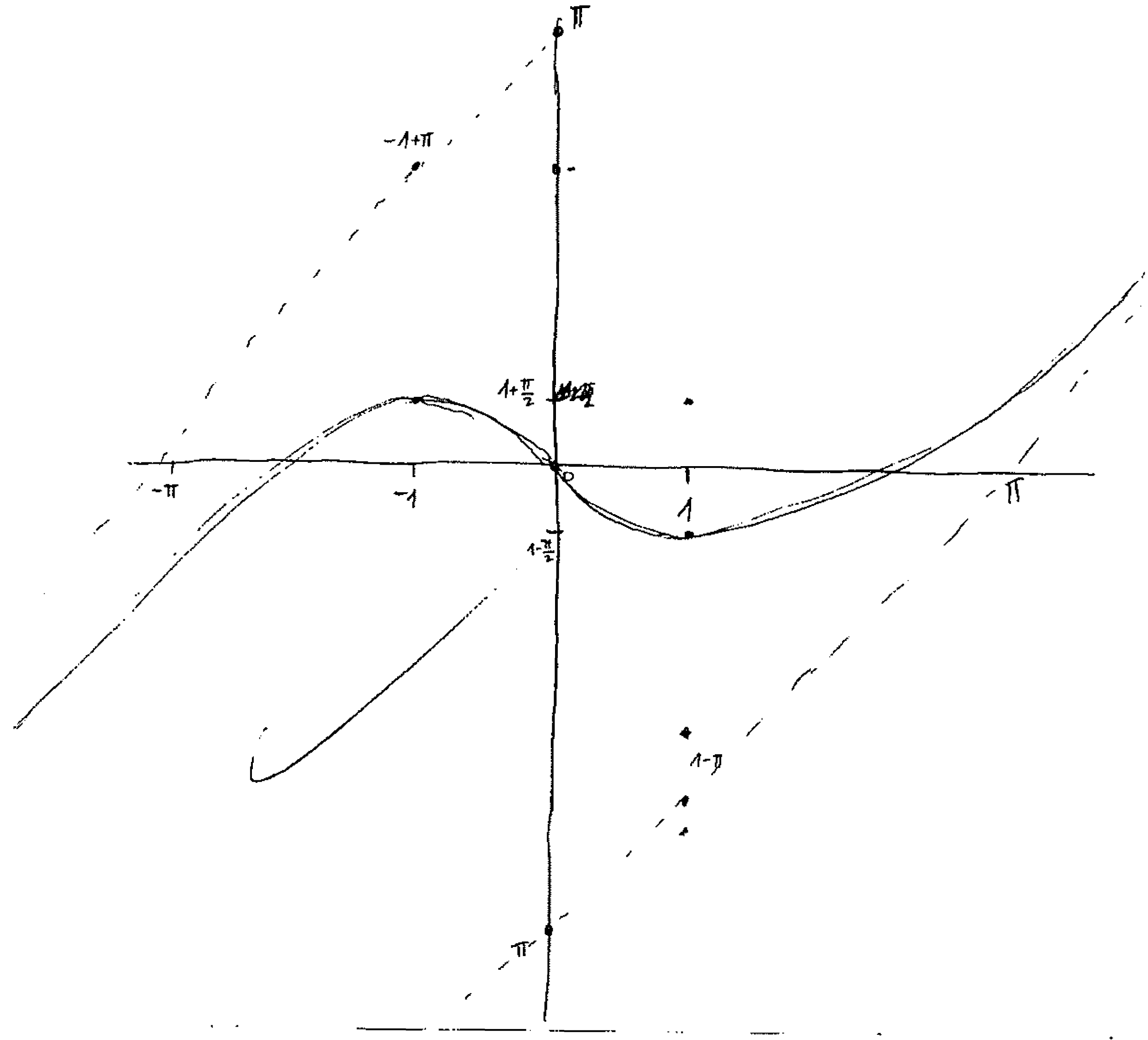
לכן אסימפטוטה משופעת 1: $\underline{y = x - \pi}$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \cancel{x} - 2\arctan x - \cancel{x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} -2\arctan x \underset{\downarrow}{=} -2\cdot -\frac{\pi}{2} = \underline{\pi}$$

כיוון ש arctan x שואף ל-$-\frac{\pi}{2}$ ב-∞-.

לכן אסימפטוטה משופעת 2: $\underline{y = x + \pi}$



(5) מש' נגדיר את הפונק' $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$

ועלינו להוכיח כי קיימות בדיוק x_1,x_2 אשר מקיימות את $f(x_1)=f(x_2)=0$.

יש לציין כי $f(x)$ פונק' רציפה $\forall x\in\mathbb{R}$ כי היא מורכבת מחיבור וחיסור של פונק' רציפות.

על מנת להוכיח זאת נמצא את נק' הקיצון של הפונק'

$$f'(x)=2x-[\sin x+x\cos x]+\sin x$$

$$f'(x)=2x-x\cos x$$

$$f'(x)=x(2-\cos x)$$

כיוון ש $-1\le\cos x\le 1$ אז $(2-\cos x)\ne 0$ עבור $\forall x\in\mathbb{R}$

לכן נק' הקיצון היחידה הינה $x=0$.

$$f(0)=0-0\cdot\sin 0-\cos 0$$

$$\underline{f(0)=-1}$$

כעת נבדוק את התנהגות הפונק' בשואפה ל ∞ ו $-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} x^2-x\sin x-\cos x=\infty$$

$\sin x$ ו- $\cos x$ חסומות בין 1 ל- -1

ולכן לא משפיעות על הגבול.

$$\lim_{x\to-\infty} x^2-x\sin x-\cos x=\infty$$

10/10

כלומר לפונק' יש נק' קיצון אחת שהיא Min ב $(0,-1)$ ומשני הכיוונים היא שואפת לאינסוף.

$x<0$	$0<x$
↘	↗

min

כעת נסתכל על הקטע $[0,\infty)$

הפונק' מקיימת $f(x)\cdot f(y)<0$ (כי $f(x)$ שווה ל -1) וניתן לבחור $y>0$ כי הפונק' שואפת לאינסוף)

ולכן לפי משפט שלמדנו בכיתה, קיימת נק' $x_1\in[0,\infty)$ כך ש $f(x_1)=0$.

באותו אופן נסתכל על הקטע $(-\infty,0]$ ונראה כי קיימת נק' $x_2\in(-\infty,0]$

אשר מקיימת $f(x_2)=0$.

ולכן ישנם שני שורשים למשוואה.

והם היחידים כי לא קיימת עוד נק' מינימום/מקסימום לפונק' שיכולה להוסיף עוד שורשים.

(5) א. נגדיר את הפונק' $g(x)=f(x)-x^n$

עלינו להראות כי קיים $x_1\in[0,1]$ כך ש $g(x_1)=0$.

אנו יודעים כי $f(x)$ רציפה ב-$[0,1]$ כך ש $f(x)\in[0,1]$

לכן קיימת נק' $c\in[0,1]$ כך ש $f(c)=c$. (לפי הוכחת נק' השבת שהוכחנו בכיתה).

לכן
$$g(c)=f(c)-c^n$$
$$g(c)=c-c^n$$

אם $n=1$ אזי $g(c)=c-c=0$ ואז סיימנו.

אם $n=0$ $g(c)=c-1\le 0$ (כי $c\in[0,1]$)

ואז נסתכל ב-f $g(0)=f(0)-0\ge 0$ (כי $f(0)\in[0,1]$)

ולפי המשפט: $g(x)$ פונק' רציפה אזי אם $g(x_1)g(x_2)<0$ קיימת $g(c)=0$.

לכן קיימת נק' $g(x_1)=0$ ומכך סיימנו.

אם $n>1$ אזי $g(c)=c-c^n\ge 0$ (כי $c\in[0,1]$, ולכן קטנה ככל שמעלים אותה בעצמה).

אך נסתכל ב-f $g(1)=f(1)-1\le 0$ (כי $f(1)\in[0,1]$)

ולכן לפי אותו משפט מצאנו שתי נק' כך ש $g(c)g(1)\le 0$ וקיימת נק' $g(x_1)=0$.

ע.ל. ערך הביניים

בכך הראתי שעבור כל n טבעי קיים פתרון למשוואה.

$\frac{15}{15}$

(1) לא נכון את $X_n=\frac{1}{n}$

ואת $y_n=\frac{1}{2n}$

~~...~~ עבור כל $\varepsilon>0$ קיים מספר כך ש $N<n$ כך שמתקיים

$|X_n-y_n|<\varepsilon$

$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{2}{2n}-\frac{1}{2n}\right|=\left|\frac{1}{2n}\right|<\varepsilon$

~~...~~ נקח את n כך ש: $n>\frac{1}{2\varepsilon}$

נבחר את $N=\frac{1}{2\varepsilon}+1$ ולכן

$\frac{1}{n}\cdot n$

$\frac{2n^2}{n}\to\infty$

$\frac{1}{n}\to 0$

$X_n=-1$

$y_n=1$

בטל

$f(a)=f(a)+\frac{f'(a)}{a}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2$

(1)

~~$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה קבועה של 1-~~

~~$\forall x \in \mathbb{N},\ X_n = 1$~~

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

נתון לנו כי f(x) הינה פונק' גזירה בסביבה a ולכן

$$\lim_{a+\frac{1}{n}\to a}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{a+\frac{1}{n}-a}=f'(a)$$

לפי הגדרת הנגזרת

כעת נחבר ונחסר איבר שאינו משנה

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left[f(a+\frac{1}{n})+f(a)-f(a)\right]\cdot\frac{1}{n}}{f(a)\cdot\frac{1}{n}}\right)^n$$

(הוספתי וחסרתי f(a) וכפלתי וחלקתי ב- $\frac{1}{n}$ לכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{\frac{1}{n}\cdot f(a)}{\frac{1}{n}\cdot f(a)}}_{1}+\underbrace{\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}\right)}_{f'(a)}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{f(a)}\right)^n$$

מכאן:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f'(a)\frac{1}{n}}{f(a)}\right)^n$$

(נכתוב)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{f'(a)}{nf(a)}\right)^{nf(a)}}_{e^{f'(a)}}\right)^{\frac{1}{f(a)}}$$

ולכן נקבל את

$$\left(e^{f'(a)}\right)^{\frac{1}{f(a)}}$$

יפה!

$\frac{10}{10}$

4) א)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{\sin^2 x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

לופיטל $$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x-[\sin x+x\cdot\cos x]+\sin x}{2\sin x\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}-x\cos x}{\sin 2x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

לופיטל $$\lim_{x\to 0} \frac{[2e^{x^2}+2x\cdot e^{x^2}\cdot 2x]-[\cos x+x\cdot -\sin x]}{\cos 2x\cdot 2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-\cos x+x\sin x}{2\cos 2x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

15/15

2) א) ניתן להפריך את הטענה ע"י הגדרת הפונק' $f(x)=0$

פונק' זו הינה פונק' קבועה ורציפה שהיא אינטגרבילית

(הוכחנו בהרצאה כי פונק' קבועה היא אינטגרבילית)
ובנוסף, פונק' רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית!
והיא מתאפסת באינסוף נק' ב- $[a,b]$, ולכן זו סתירה לטענה
(כי כל ערכיה הם 0)

כלומר, קיימת פונק' $f(x)=0$ שמתאפסת באינסוף נק'
בקטע $[a,b]$ (בעצם בכל נקודה כי ערכיה 0) והיא רציפה ולכן
אינטגרבילית!

15/15

(2) מ.צ. כי $g(c)\int_a^c f(t)dt = -f(c)\int_b^c g(t)dt$

$$g(c)\int_a^c f(t)dt + f(c)\int_b^c g(t)dt = 0$$

(נעזר בפונק' $h(x)$

בצורה הבאה:

והיא $h(x)=\int_a^x f(t)dt \cdot \int_b^x g(t)dt$ ✓

אני רואים כי $h(a)=0$ (אינטגרל $\int_a^a=0$ כאשר הוא אותה נק').

וכי $h(b)=0$ (כנ"ל).

לכן קיימות שתי נק' בהן הפונק' שווה 0.

לפי משפט רול, אם ישנן שתי נק' בהן הפונק' מתאפסת (כאשר הפונק' רציפה וגזירה בקטע סגור, ומכיוון ש $h(x)$ היא הרכבה של שתי פונק' רציפות וגזירות, אז היא רציפה וגזירה בקטע $[a,b]$), קיימת נק' בה הנגזרת מתאפסת

לכן לפי משפט רול, קיימת נק' c, כך ש $h'(c)=0$

לכן, נגזור את $h(x)$ בנק' c ונקבל:

$$\left(\int_a^c f(t)dt \cdot \int_b^c g(t)dt\right)' = f(c)\cdot\int_b^c g(t)dt + \int_a^c f(t)dt \cdot g(c) = 0$$

$$(F(x)\cdot G(x))' = (f(x)\cdot G(x) + g(x)\cdot F(x) = 0$$

לפי המשפט היסודי של החדו"א:

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ $\quad$ $G(x)=\int_b^x g(t)dt$

$F'(x)=f(x)$ $\quad$ $G'(x)=g(x)$

✓

10/10

סיגמה

סינגולר

מתבדר.

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(a+\tfrac{1}{n}) \right.$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ a+\frac{1}{n}\to a}} \frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)\,\frac{1}{n}} = f'(a)$$

$$\left(\frac{n}{n} \cdot \frac{f(a)+f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}} \right)^n$$

סיגמה

$$\lim_{n\to\infty} \cancel{f(a)} \; n \, (f(a)$$

$$\left(\frac{n}{n}\right)^n \lim \left(\frac{f(a)}{\frac{1}{n}\,\frac{1}{n} f(a)} + \frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}\,f(a)} \right)$$

$$f(a) \qquad \lim \left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right)^n_{>0}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad y_n = \frac{1}{2n}$$

$$\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right] < \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$$N = \frac{1}{2\varepsilon} \qquad \varepsilon$$

לפי, אך

$$\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}$$

$$\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{f(a)+f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}}{\frac{1}{n}}$$

$$g(x)\int_a^x f(t)\,dt + f(x)\int_a^x g(t)\,dt = 0$$

$$\boxed{((g(x)\cdot f(x))' = 0}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{n} f(a)}{\frac{1}{n} f(a)} + \frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}\cdot f(a)} \right)^n$$

$$\left(1 + \frac{f'(a)}{f(a)}\right)^n$$

$$\left(\int_a^x f(t) \int_b^x g(t)\right)'$$

$$F(x)\,G(x)$$

$||x|-|y||<$

$|x_n-y_n|<\varepsilon$

$|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$

$|y_m-y_m|<\frac{\varepsilon}{2}$

$|\overset{C_n}{(x_n-y_n)}-\overset{C_m}{(x_m-y_m)}|\leq|\varepsilon-\varepsilon|$

$|x+3|\leq|x|+|y|$

$|x_n-y_n-x_m-$

$|(x_n-x_m)+(y_n-y_m)|$

$C_n=\begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \\ y_{\frac{n+1}{2}} & \end{cases}$

$|C_n-C_m|<\varepsilon$

$|(x_{\frac{n}{2}}-y_{\frac{n+1}{2}})-(x_{\frac{m}{2}}-y_{\frac{m+1}{2}})|$

$||x_{\frac{n}{2}}-y_{\frac{n+1}{2}}|-|\quad|<\varepsilon$

$\sin x$

$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(c)$

$\lim$

$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$

$\int_a$

$\frac{f(a)+f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}$

$\int$

$\frac{f(a)}{f(a)}\quad\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$

$\int_a^b$

$f(a)=0\quad\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<\varepsilon$

$[c,d]$

$g(c)\left(\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt\right)=-f(c)$

$X_n \quad X_n - X_m +$

$|X_n - X_m| < \varepsilon$

$|Y_n - Y_m| < \varepsilon$

$|C_n - C_m| < \varepsilon$

$|(X_n - Y_n) - (X_m - Y_m)| < \varepsilon$

$\cancel{|X_n - X_m + (Y_m + Y_n)|}$

$|(X_n - X_m) + (Y_m - Y_n)| < \varepsilon$

$C_n = \; X_n - Y_n$

$|C_n - C_m| < \varepsilon$

$\cancel{|X_n - Y_n - (X_m - Y_m)|} \le \varepsilon$

$\cancel{||X_n - Y_n| - |X_m - Y_m||} \le$

$C_n = |X_n - Y_n|$

$|C_n - C_m| < \varepsilon$

$||X_n - Y_n| - |X_m - Y_m|| \le$

$\int_a^b \cancel{f(t)dt} = (b-a) f(c)$

$\int_a^b g(t) = (b-a) g(c)$

$\frac{\int_a^b g(t)}{g(c)} = \frac{\int_a^b f(a)}{f(c)}$

$-f(c) \int_b^a g(t) = g(c) \int_a^b f(t)$

סוכם

$|x+y| \le |x| + |y|$

$|-5+3|$

$-2 \le |5| + 3$

$\cancel{|-5| + |3| +}$

$||x| - |y|| \le |x - y|$

$-5 \; +3 \qquad -5-3$

$-5 - |3| \qquad -8$

$-5+3$

-2

$\lim \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n$

$X^2 - X\sin x - \cos x$

$f'(x) = 2x - [\sin x + x\cos x] + \sin x$

$f'(x) = 2x + x\cos x$

$\cancel{2x = 0} \qquad -3x = 0$

~~אזי X~~ שמקיים

$X(2 + \cos x)$

$X = 0$

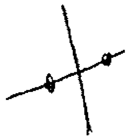
$X^2 \quad -1$

$$X^2 = X\sin x + \cos x$$

יש מבוק מי שרשום.

$$f(x) = x^2 - x\sin x + \cos x$$

$f(0)=1$



$$\cancel{f'(x) = 2x - [x\cos x + x}$$

$$f'(x) = 2x - [\sin x + x\cos x] - \sin x$$

$$f''(x) = 2x - 2\sin x + x\cos x$$

$\cancel{2x - 2 - x}$ $\cancel{2x + 2 + x}$

$\cancel{x - 2 = 0}$ $\cancel{3x + 2 = 0}$

$\cancel{x = 2}$ $\cancel{x = 1.5}$

$$f''(x) = 2x - 2\sin x + x\cos x$$

$$f''(0) = \cancel{2} \quad 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

$$\lim_{a+\frac{1}{n}\to a}\frac{f(a+\frac{1}{n}) - f(a)}{a+\frac{1}{n}-a} \qquad \lim \frac{f(a+\frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{a^{+}} \quad f(a) \qquad \lim n\left(f(a+\tfrac{1}{n}) - f(a)\right)$$

$||x|+|y|| \le |x-y|$ $\qquad C_n = X_n - Y_n$ נקבל סדרה

$|\cancel{C_n} - C_{n+1}$ $\qquad$ יהיו כי עבור ε קיים $n \ge N$

$|C_{n+p} - C_n| < \varepsilon$

$< |X_{n+p} - Y_{n+p} - (X_{n+p} + Y_n)| < \varepsilon$

$||X_{n+p} - Y_{n+1}$ $\quad < |\varepsilon - \varepsilon|$

$f(a)>0$

[illegible]

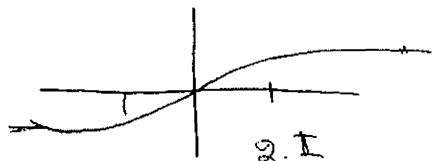
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

(נגזרת פונ'

$$\lim_{a+\frac{1}{n}\to a}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{a+\frac{1}{n}-a}=L$$

$$\lim\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}$$



$2\cdot\frac{\pi}{3}$

$f(x)=x-2\arctan x$

ט .x

פונק' רציפה.

-100

$$f'(x)=1-2\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2}{1+x^2}=\frac{x^2-1}{1+x^2}=0$$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm1$

$f(1)=1-\frac{\pi}{2}=-0.57$

$f(-1)=-1+\frac{\pi}{2}=+0.57$

$x<-1$	$-1<x<1$	$1<x$
↗	↘	↗
	max	min

$$\frac{x^2-1}{1+x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2x(1+x^2)-(x^2-1)\cdot2x}{(1+x^2)^2}$$

$$2x+2x^3-2x^3+2x=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$x<0$	$0<x$
∩	∪

0 נק' פיתול

$$f(x) = x^2 - x\sin x + \cos x$$

$$f'(x) = 2x - [\sin x + x\cos x] - \sin x$$

$$f'(x) = 2x - 2\sin x + x\cos x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - x\sin x - \cos x}{\sin^2 x} = \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x - [\cancel{\sin x} + x\cdot\cos x] + \cancel{\sin x}}{2\sin x\cdot\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x - x\cos x}{\sin 2x}$$

$$\lim \frac{[e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x + e^{x^2}\cdot 2] - [\cos x + x\cdot -\sin x]}{\cos 2x\cdot 2}$$

$$\lim \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - \cos x + x\sin x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$x\to\infty \quad \frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{1}{1} = 1$$

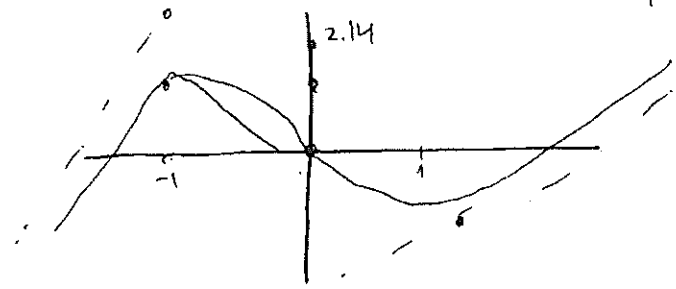
$$b = \lim_{x\to\infty} -2\arctan x = -\pi$$

$$\lim_{x\to -\infty}$$

π

$1+\pi$

$1-\pi$



טיוטה :)

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}$$

$f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\qquad$ $g(x)=x^2$

$f'(x)=\int\ldots$ $\qquad$ $g'(x)=2x$

$$\lim x^2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int$$

---

f(x) פונק' רציפה בקטע סגור

אזי יש לה מינ' ומק' בקטע והיא חסומה.

$f(0)=\cancel{a}\,0^n=0$ $\qquad$ $[0,1]$, $[0,1]$

$f(1)=\quad 1$

$$g(x)=f(x)-x^n$$

צ"ל ש $g(x)=0$ עבור $g(0)=f(0)-0\geq 0$

$g(1)=f(1)-1$

ידוע כי קיימת נק' c כך $g(c)=f(c)-c^n$

$g(c)=c-c^n\to<0$