CC

מרצה: ש. ארטשטיין | מועד א' סמסטר א' תשס"ט | 22/2/2009

מבחן במבוא לתורת הקבוצות

משך המבחן: שלוש שעות. השימוש בכל חומר עזר אסור, כולל למחשבון.

יש לענות על בדיוק **ארבע** שאלות.

נא לסמן, בעמוד הראשון במחברת הבחינה, אילו שאלות בחרתם.

עליכם לצטט, במדויק, כל משפט מהשיעור בו הנכם משתמשים.

שימו לב: בכל סעיף, תשובה לא נכונה תזכה אתכם ב-0 נקודות. תשובה ריקה תזכה אתכם ב- 20% משווי הסעיף.

אנא רשמו תשובות מלאות ומדויקות.

שאלה 1: (25 נקודות)

הוכח/הוכיחי את משפט הסכום: לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a+a=a$.

שאלה 2: (25 נקודות)

תהיינה A,B,C,D קבוצות לא ריקות.

(א) נתונות שתי פונקציות שקילות $f:A\to C$ ו-$g:B\to D$. מצאו במפורש פונקצית שקילות H בין שתי הקבוצות הבאות A^B ו-C^D. יש להוכיח שהיא אכן פונקצית שקילות.

(ב) נתונות $f:A\to C$ ו-$g:B\to D$ כמו בסעיף (א), אולם נתון רק ששתיהן חד-חד-ערכיות. עליכם להגדיר פונקציה חד-חד-ערכית $H:A^B\to C^D$. הוכיחו את תשובתכם.

AAAC-24

שאלה 3: (25 נקודות)

(א) מהי העוצמה המרבית של אוסף של עותקים זרים במישור של כל אחת מהאותיות הבאות (מותר לסובב, להגדיל ולהקטין):

(1) A

(2) B

(3) C

(ב) נגדיר שני יחסים T ו- S על $\mathbb{Z}$ באופן הבא: xSy אם $x-y$ מתחלק ב-2009 ו xTy אם $x+y$ מתחלק ב-2009.

(1) האם T יחס שקילות?

(2) האם $S \cup T$ יחס שקילות?

שאלה 4: (25 נקודות)

(א) נתונה קבוצה סדורה חלקית ולא ריקה $(A,\leq)$ בה לכל שרשרת יש חסם מלעיל. רשמו את ההגדרות של: שרשרת, חסם מלעיל, ואיבר מקסימאלי. הוכיחו שלכל $a \in A$ ניתן למצוא איבר מקסימאלי $b \in A$ כך ש $a \leq b$ (מותר להשתמש בלמה של צורן).

(ב) נתונות קבוצות A,B לא ריקות כך ש: $\left|A\right| \leq \left|B^B\right|$ וכן $\left|A^B\right| > \left|B^B\right|$. יש להוכיח כי B סופית.

שאלה 5: (25 נקודות)

(א) נתונה $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה עולה ממש (זאת אומרת, $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$) הראו כי לכל $x \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(x) \geq x$.

(ב) נתונה $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ פונקציה עולה ממש, האם בהכרח לכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $f(x) \geq x$?

(ג) נתונה קבוצה סדורה היטב ולא ריקה $(X,<)$, ופונקציה $f: X \to X$ עולה ממש (ביחס ליחס הסדר על X). הראו כי לכל $x \in X$ מתקיים $f(x) \geq x$.