33

אוניברסיטת תל אביב
פקולטה למדעים מדויקים

מסי הקורס 0366-1120-01 | סמסטר בי מועד אי
המרצה: פרופי א. שצירבק | תאריך: 10.07.2009

<u>בחינה בקורס "מבוא לאלגברה 2 לדו-חוגי"</u>

<u>משך הבחינה 3 שעות</u>. עליכם לבחור ולענות על **<u>4 מתוך 6 השאלות</u>**.
ערך כל השאלה הינו 25 נקודות.
תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה אתכם במלוא הנקודות
אין להשתמש בחומר עזר, כולל מחשבון.

בהצלחה !!

<u>שאלה 1.</u> *(א)[13 נ']* מצאו את כל תתי המרחב T-אינווריאנטיים ב-$\mathbb{R}^3$, כאשר העתקה T נתונה על ידי הנוסחה $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\3y+z\\3z\end{pmatrix}$.

(ב) [12 נ'] פולינום $f(x)=(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)$ הוא הפולינום האופייני של מטריצה M. מצאו את הפולינום המינימאלי של M^3. <u>[אין קשר בין הסעפים!!]</u>

<u>שאלה 2.</u> יהיה $(V, (\cdot,\cdot))$ מרחב מכפלה פנימית מעל מרוכבים. לכל אופראטור ליניארי $T:V\to V$ נגדיר שני אופראטורים חדשים: $T_R=\frac{T+T^*}{2},\ T_I=\frac{T-T^*}{2i}$.

(א) *[8 נ']* בדקו כי T_R ו-T_I צמודים לעצמם;

(ב) *[9 נ']* הראו כי T נורמאלי אם ורק אם T_R ו-T_I מתחלפים, $T_IT_R=T_RT_I$;

(ג) *[8 נ']* נניח כי T אופראטור נורמאלי ו-$\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{C}$ כל הערכים העצמיים השונים שלו. מצאו את הערכים העצמיים של T_R ו-T_I.

<u>שאלה 3</u> במרחב ליניארי $V=\{a+bx,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ של פונקציות ליניאריות, העתקה $T:V\to V$ נתונה על ידי הנוסחה $T(a+bx)=2a+b+bx$.

(א) [8 נ'] מצאו את צורת ז'ורדן ובסיס ז'ורדן של T [ניתן להיעזר במטריצה של T, למשל בבסיס סטנדרטי $\{1,x\}$];

(ב) [9 נ'] חשבו את T^k, כאשר k מספר טבעי;

(ג) [8 נ'] חשבו את $T^{2009}(x-1)$.

AAAS-23

שאלה 4. *(א) [8 נ']* הוכיחו: אם למטריצות A,B יש אותה צורת ז'ורדן, אזי הן דומות, כלומר קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $B=P^{-1}AP$.

(ב) [9 נ'] תהי $M\in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ מטריצה מדרגה $(n-1)$. מצאו את צורת ז'ורדן של M אם ידוע כי הפולינום האופייני של M מתאפס אך ורק ב-0.

(ג) [8 נ'] הסבירו האם המטריצות
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \dots & (n-2) & (n-1)\\ 0 & 0 & 1 & \dots & (n-3) & (n-2)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ו- $$B=\begin{pmatrix}0 & (n-1) & (n-2) & \dots & 2 & 1\\ 0 & 0 & (n-1) & \dots & 3 & 2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}$$ (מגודל $n\times n$) דומות?

שאלה 5. *(א) [13 נ']* יהיה $\left(V,\ (\cdot,\cdot)\right)$ מרחב מכפלה פנימית. הוכיחו כי לכל העתקה ליניארית $T\in L(V)$ מתקיים $\left(KerT\right)^{\perp}=\operatorname{Im}T^*$ ו- $\dim\left(KerT\right)=\dim(KerT^*)$;

(ב) [12 נ'] במרחב אוקלידי $\mathbb{R}^3$ מצאו את ההיטל האורתוגינאלי של נקודה $A(1,0,0)$ על המשור $Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

[אין קשר בין הסעפים!!]

שאלה 6. יהיו $\left(V,\ (\cdot,\cdot)\right)$ מרחב מכפלה פנימית, $\vec{u}\in V$ וקטור היחידה, $\|\vec{u}\|=1$, והעתקה $T:V\to V$ נתונה על ידי הנוסחה $T\vec{v}=\vec{v}-2(\vec{v},\vec{u})\vec{u}$ לכל $\vec{v}\in V$.

(א) [15 נ'] מצאו את כל הערכים העצמיים ואת תתי המרחב העצמיים של T [רמז: חשבו $T\vec{u}$];

(ב) [5 נ'] האם T נורמאלית? אורתוגונאלית? צמודה לעצמה? (יש לנמק)

(ג) [5 נ'] חשבו את $\det T$.

ב ה צ ל ח ה !!