בחינה בקורס - "תורת הקבוצות"

המרצה - פרופ' מוטי גיטיק

ענו על 4 מתוך 6 השאלות הבאות

שאלה 1. (AC) הוכיחו כי קיימות זוג פונקציות ממשיות מחזוריות $f,g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$. כך שסכומן חינה פונקציות הזהות. $\forall x\in\mathbf{R}.\ f(x)+g(x)=x$.

שאלה 2. הוכיחו כי חיתוך אלכסוני של סל"חים ב- ω_1 הינו סל"ח.

שאלה 3. הוכיחו כי מונח מדיד ממשי הוא אי-נשיג חלש (משפט $Ulam$).

שאלה 4. הוכיחו - $\aleph_\omega^{\aleph_1}=\aleph_\omega^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_1}$.

שאלה 5. הוכיחו כי אם $F\subseteq\prod_{\alpha<\omega_1}\aleph_{\alpha+1}$ אוסף פונקציות שונות על סלח"ים אז $|F|\leq\aleph_{\omega_1+1}$.

שאלה 6. יהי κ מונח אינסופי. נתונים: $<_W$ סדר טוב של 2^κ ו- $<_L$ הסדר המילוני השמאלי של 2^κ. נגדיר $F:[2^\kappa]^2\to 2$ על ידי:

$$F(\{f,g\})=\begin{cases}0 & (f<_L g)\iff(f<_W g)\\ 1 & otherwise\end{cases}$$

הוכיחו כי כל $H\subset 2^\kappa$ הומוגנית היא מעוצמה לכל היותר κ. הסיקו כי $\kappa^+\nrightarrow(\kappa^+)^2_2$.

AAAC-31

מחברת מס' _____
מתוך _____ מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

4

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

תאריך הבחינה 31.02.10

שם הקורס תורת הקבוצות

שם המורה ברי מולי גיליף

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים 25

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום. 25
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת וחכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו. 25
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה 25
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה וזאת לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב כלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	100
המחברת נבדקה ביום	
חתימת המורה	

3014081

בהצלחה.

בחרתי לענות על השאלות 1,2,3,5

שאלה 2:

הוכחה:

נתון: $\langle C_\alpha \mid \alpha<\omega_1 \rangle$ סדרה של סגורים ב- ω_1 כך ש- $S=\Delta_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ הוא סגור.

נוכיח סגירות: יהי $\langle \alpha_n \mid n<\omega \rangle$ סדרה עולה של איברי S. אז $\alpha=\bigcup_{n<\omega}\alpha_n$ ב- S, כלומר $\forall \beta<\alpha\ \alpha\in C_\beta$.

יהי $\beta<\alpha$, אז יש $n_0<\omega$ כך ש- $\forall n\ge n_0\ \beta<\alpha_n$, ולכן (בגלל ש- $\alpha_n\in S$) $\forall n\ge n_0\ \alpha_n\in C_\beta$, ואז $\alpha=\bigcup_{n\ge n_0}\alpha_n\in C_\beta$ (מסגירות של C_β)

אז $\alpha\in C_\beta$ $\forall \beta<\alpha$ ולכן $\alpha\in S$.

אז S סגורה.

נותר להראות כי S אינה חסומה!

יהי $\alpha_0<\omega_1$, נראה כי יש איבר $\alpha\in S$ כך ש- $\alpha>\alpha_0$; נתבונן בסדרה הבאה המוגדרת באינדוקציה:

$\alpha_0=0$

$\alpha_1\in\bigcap_{\beta<\alpha_0} C_\beta(\alpha_0)$ איבר כלשהו (יש כזה כי $C_\beta(\alpha_0)$ לא חסום, כי מדובר בחלקים סגורים)

$\alpha_n\in\bigcap_{\beta<\alpha_{n-1}} C_\beta(\alpha_{n-1})+1$

$C_\beta(\alpha_0+1)\setminus\beta$ כדי שנקבל ש- $\alpha_1>\alpha_0$

כלומר סדרה עולה $\langle \alpha_n : n\in\omega \rangle$

שמוגדרת $\alpha_0=\delta$, ולכל n שבשבילו את כל α_{n+1},

$\alpha_{m+1}\in\bigcap_{\beta<\alpha_{m-1}}(C_\beta \setminus \alpha_{m-1})$ אי אפשר כלשהו

(כמו שזה כתוב כי לא חותכים בין מעגלים אלא מלקחים אותם, אבל לא ריק)

אזי $\alpha=\bigcup_{n\in\omega}\alpha_n$

נראה כי $\alpha\in S$!

לכל $\beta<\alpha$

אזי יש $n_0<\omega$ כך שלכל $n_0<n<\omega$

$\beta<\alpha_n$.

ולכן לכל $n_0<n<\omega$

$C_\beta \ni \alpha_{n+1}$

ואזי $\alpha=\bigcup_{n_0<n<\omega}\alpha_{n+1}\in C_\beta$ (מסגירות של C_β)

1. $\delta\le\alpha$

כי $\alpha=\delta\cup\bigcup_{n_0<n<\omega}\alpha_{n+1}$. 1. $\delta\le\gamma,\delta$.

α_{n+1} אזי S סגיר.

שאלה 3 יהי K מונה מצוין ממש.

צ"ל כי K סדיר ולבן יחיד.

נראה קודם כי K סדיר!

נניח בשלילה כי K רגולרי, אזי יש $\delta<K$

כך ש- $\mathrm{cofin}=\delta$, כלומר יש סדרה $\{\alpha_\beta<K \mid \beta<\delta\}$

אולה שמקיימת $K=\bigcup_{\beta<\delta}\alpha_\beta$.

K מצוין ממש, ולכן יש פונקציה מידה

$m: P(K)\to[0,1]$ חיובית, K-אדיטיבית, כך לכל $\alpha<K$ $m(\alpha)=0$ (כי α קבוצה מ- K)

אזי

$$1=m(K)=m\left(\bigcup_{\beta<\delta}\alpha_\beta\right)\underset{K\text{-אדיטיבית}}{=}\sum_{\beta<\delta}m(\alpha_\beta)=0$$

סתירה.

אזי K סדיר.

נותר לראות כי K גבולי!

נניח בשלילה כי K יורש, נסמן ב- λ את

המונה הקודם ל- K (כלומר המונה שמקיים $\lambda^+=K$).

נראה כי קיימת סדרת קבוצות

$\{A_\alpha^\beta \mid \alpha<\lambda_K^+,\ \beta<\lambda\}$

כך ש- (1) $A_\alpha^\beta\subseteq\lambda^+$, (2) $\forall\alpha_1,\alpha_2<\lambda^+$ $\alpha_1\neq\alpha_2$ $\forall\beta<\lambda$ $A_{\alpha_1}^\beta\cap A_{\alpha_2}^\beta=\emptyset$

③ $\forall \alpha<\lambda^+ \quad \lambda \le \left|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\beta<\lambda} A^\beta_\alpha\right|$

הוכחה: לכל $\gamma<\lambda^+$ יש פונקציה $f_\gamma:\lambda\to\lambda+1$

כך שמתקיים $A^\beta_\alpha=\{\gamma<\lambda^+ \mid f_\gamma(\beta)=\alpha\}$ כאשר $\beta<\lambda$, $\alpha<\lambda^+$ עבור אף בצורה אחת

בלי הגבלת הכלליות!

① קודם כל נראה שמתקיים הדרישה הראשונה. (מרכיבים זרים בזוגות אל λ^+)

② יהיו $\alpha_1<\alpha_2<\lambda^+$ ויהי $\beta<\lambda$, אז $A^\beta_{\alpha_1}\cap A^\beta_{\alpha_2}=\emptyset$

כי אם לא, אז יש $\gamma<\lambda^+$ כך ש- $f_\gamma(\beta)=\alpha_1$, $f_\gamma(\beta)=\alpha_2$

אבל אז $\alpha_1=\alpha_2$ סתירה. אז ② מתקיים.

③ $\forall \alpha<\lambda^+ \quad \lambda^+\setminus\alpha = A=\bigcup_{\beta<\lambda} A^\beta_\alpha$ ולכן $\left|\lambda^+\setminus\bigcup_{\beta<\lambda}A^\beta_\alpha\right|=|\alpha|\le\lambda$

כי יהי $\alpha\le\delta$ אז נקח $\delta=\gamma$, אז בגלל

ש- f_γ של $\gamma+1$, יש $\beta<\lambda$ כך ש- $f_\gamma(\beta)=\gamma=\delta$

אז יש A^β_α כך ש- $\delta\in A^\beta_\alpha$, אז $\delta\in A$.

ואם $\alpha<\delta$ אז לא יתקיים $\delta\in A$ כי

$\alpha<\delta\le f_\gamma(\beta)$ $\forall \alpha<\delta$ $\forall \beta<\lambda$.

אז יש יחידות בבנייה כאלו.

כדי לנתר לדרישות סתירה!

כאמור בסמלים (A) ו-(B) יש יחידה אוניברסלית של X

ולכן $\forall A\subseteq\aleph^+=K$ אם $|A|<K$ $m(A)=0$

$\forall\alpha<\aleph^+$ אזי $m(\aleph^+\setminus\bigcup_{\beta<\gamma}A_\alpha^\beta)=0$

כלומר $m(\bigcup_{\beta<\gamma}A_\alpha^\beta)=1$ אבל יש β כך ש-

$m(A_\alpha^\beta)>0$ ולכן לכל $\alpha<\aleph^+$ יש $\beta<\gamma$

כך ש- $m(A_\alpha^\beta)>0$ ואז לפי שאלת הנייח

יש $B\subseteq\aleph^+$ $|B|=\aleph^+$ כך $\beta<\gamma$ ש-

$m(A_\alpha^\beta)>0$ $\forall\alpha\in B$

אבל אז קיבלנו $K=\aleph^+$ קבוצות

בדידות שמודדות לבדן מאפס מ-0, וזו

סתירה.

אזי K לא יכול להיות לכן גבולי,

והבאנו שכולו סדיר.

אזי K אי נשיג חלש.

שאלה 5:

נניח בשלילה:

אזי יש $F \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+1}$ כך ש- $|F| \geq \aleph_{\omega_1+2}$

ולכן יש $F' \subseteq F$, $|F'| = \aleph_{\omega_1+2}$.

לכל $f \in F'$ נתבונן בקבוצה הבאה:

$$T_f = \{ g \in F \mid \text{שבת } |\{\alpha<\omega_1 \mid g(\alpha) < f(\alpha)\}| \}$$

ולפי לעמה קודמת (מה שיודעים לעמוד בתנאי הבא) $|T_f| \leq \aleph_{\omega_1}$ $\forall f \in F'$.

נתבונן בסדרה הבאה: $\langle f_\alpha \in F' \mid \alpha < \aleph_{\omega_1+2} \rangle$

נגדיר אותה באינדוקציה: $f_0 \in F'$ איבר

כלשהו, נניח שהגדרנו את f_β $\forall \beta<\alpha$

ונגדיר את f_α:

$f_\alpha \in F' \setminus R_\alpha$ כלשהו, כאשר

$$R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} T_{f_\beta}.$$

ולכל $\alpha<\beta<\aleph_{\omega_1+2}$ $\forall$

$\{\gamma<\omega_1 \mid f_\beta(\gamma) < f_\alpha(\gamma)\}$ לא שבת (על פי הגדרת T_{f_α})

ולכן $\{\gamma<\omega_1 \mid f_\beta(\gamma) \geq f_\alpha(\gamma)\} \supseteq$ סלמ"ר

ולכל $\alpha<\aleph_{\omega_1+1}$ $\forall$ $\{\gamma<\omega_1 \mid f_\alpha(\gamma) \geq f_{\aleph_{\omega_1+1}}(\gamma)\} \supseteq$ סלמ"ר

כלומר $\{\gamma<\omega_1 \mid f_\alpha(\gamma) < f_{\aleph_{\omega_1+1}}(\gamma)+1\} \supseteq$ סלמ"ר

ולכל α $A = \{f \in F' \mid \text{שבת } |\{\gamma<\omega_1 \mid f_\alpha(\gamma) < f_{\aleph_{\omega_1+1}}(\gamma)+1\}|\}$ מקיימת

NIKOLAOU UC-NCIC

$|A| \geq \aleph_{\omega_1+1}$

לאחר סתירה לטענה הקודמת (בעזרת קבוצת מעוררות בשיעור)

שעולה כי אין $g \in \prod_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+1}$

ו- $F \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+1}$ אופן בו-בדיוק שונות

לפי הנ"ח, שאי-שוויון $\{\alpha \mid f(\alpha) < g(\alpha)\}$ שבת $\forall f \in F$

כולל $|F| \leq \aleph_{\omega_1}$.

ולכן יש סתירה.

ובמילים אין $F \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+1}$ אופן בו-בדיוק

שונות על מלמ"ים כולל $|F| \geq \aleph_{\omega_1+1}$

שאלה 1! נגדיר סדר טוב על $\mathbb{R}$, כך שמתקיים

$$\mathbb{R} = \{a_\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$$

נגדיר כעת f,g!

נניח 1- לגבי המתנדר של f.

1- $\sqrt{2}$ המתנדר של g.

נגדיר כעת f,g כ- a_α $\forall \alpha < 2^{\aleph_0}$ באינדוקציה.

נניח $f(a_0)=0$ כעת

$f(a_0+n)=0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

כעת $g(a_0+n)=a_0+n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, ולכן $g(a_0+\sqrt{2}m+n)=a_0+n$ $\forall n,m \in \mathbb{Z}$.

וכעת $f(a_0+\sqrt{2}m+n)=\sqrt{2}m$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$.

בינתיים אין סתירות כי $\sqrt{2}m_1+n_1 \neq \sqrt{2}m_2+n_2$ $\forall n_1,m_1,n_2,m_2 \in \mathbb{Z}$ (לא הגדרנו שום דבר בראשיים)

כעת הגדרנו סתם f,g את $A_0 \subseteq \mathbb{R}$. אם $A_0=\mathbb{R}$ סיימנו, אחרת $A_0 \subsetneq \mathbb{R}$.

כעת יש α המקיים כך ש- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A_0$

$f(a_\alpha)=0$ כעת שזה נגדיר

ושוב נקבל באותה דרך $f(a_\alpha+\sqrt{2}m+n)=\sqrt{2}m$

$g(a_\alpha+\sqrt{2}m+n)=a_\alpha+n$

לא הגדרנו שום $a_\beta \in \mathbb{R}$ בראשיים (לכן אין סתירה)

כאשר לכולם m_1,m_2 אחד מ- n_1,n_2 שונים. (הסבר בעמוד הבא לעמוד)

מכון טכנולוגי חיפה

כי (1) $a_\beta + \sqrt{2}m_1 + n_1 \neq a_\beta + \sqrt{2}m_2 + n_2$

$\forall m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ כאשר לפחות אחד מ- m_1, m_2

ו- n_1, n_2 שונים.

(כי אם $m_1 \neq m_2$ אז $\sqrt{2} = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$ לא ייתכן

ואם $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$

$n_1 = n_2$ גם לא ייתכן)

(2) $a_\beta + \sqrt{2}m_1 + n_1 \neq a_0 + \sqrt{2}m_2 + n_2$ $\exists\, m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$

כי הנחנו שלא הצדנו את a_β קודם

לכן ואז גם היה שוויון ביניהם מקבלים

$$a_\beta = a_0 + \sqrt{2}(m_2 - m_1) + n_2 - n_1$$

סתירה.

אז גם לא מעבר כראוי.

כעת הצדנו g, f על $A_1 \subseteq \mathbb{R}$, A_0 (בלי אם)

ושוב שם יש שוויון ($A_1 = \mathbb{R}$) אז סיימנו,

אחרת נמשיך כך באינדוקציה!

נניח כי לכל $\beta < \alpha$ הצדנו את

$\mathbb{R} \supseteq A_\beta \subseteq A_\gamma$ (אם) $\forall \gamma < \beta$.

אז גם $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta = \mathbb{R}$ סיימנו, אחרת ניקח

$$a_\delta \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$$

כאשר δ כאשר שמקיים $a_\delta \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$

אז שזה נגדיר $f(a_\gamma + m\sqrt{2}+n) = m\sqrt{2}$

$\forall n,m \in \mathbb{Z}$ $\quad g(a_\gamma + m\sqrt{2}+n) = a_\gamma + n$

ונסמן

$$A_\gamma = \left(\bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta\right) \cup \{a_\gamma + m\sqrt{2}+n \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$$

ואז אלו הגדרנו שום דבר מעניין (לפחות סתירה)

כי אם כן $\overbrace{\text{אז}}^{\text{יש } \beta}$ שמתקיים

$$a_\gamma + \sqrt{2}m_1 + n_1 = a_\beta + \sqrt{2}m_2 + n_2$$

כאשר $m_1,n_1,m_2,n_2 \in \mathbb{Z}$, ושזה בגלל הבנייה בדרך כלל

קיבלנו בה לא יכול להיות כי אז $a_\gamma = a_\beta + \sqrt{2}(m_2-m_1) + n_2 - n_1$

ולכן סתירה כי הנחנו שלא הגדרנו את a_γ.

אז (2) $a_\gamma + \sqrt{2}m_1 + n_1 = a_\gamma + \sqrt{2}m_2 + n_2$ כאשר $m_1,m_2,n_1,n_2 \in \mathbb{Z}$

ולמרות שאחד מ- m_1,m_2, n_1,n_2 שונים,

אז גם $m_1 \neq m_2$ מהבדיל אחרת, ו-

$\sqrt{2} = \frac{n_2-n_1}{m_1-m_2}$ סתירה.

וגם $n_1 \neq n_2$, $m_1 = m_2$

נקבל כי $n_1 = n_2$ סתירה.

אז הכל מוגדר טוב, ונראה שכל $a_\gamma \in \mathbb{R}$

(כי לא נגיע יותר מ- $2^{\aleph_0}$ בגדים, וכל בגד אחרון

מסתגלים על הרישון אלא מקיים)

אנו הגדרנו את g על כל $\mathbb{R}$,

והגדרנו אותן כך ש- $(f+g)(x)=x$

לכל $x\in\mathbb{R}$, וכן מתנוגדות.

אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב