12/09/12

0366-3126

סמסטר א', תשע"ב

בחינה בתורת הקבוצות

מרצה: מוטי גיטיק

מתרגל: אילון בילינסקי

משך הבחינה שלוש שעות.
יש לענות על 4 שאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות.
יש לנמק את טענותיכם ולצטט במדוייק משפטים עליהם נסמכים בפתרון. השימוש בחומר־עזר אסור.

ענו על 4 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות:

1. הוכיחו משפט $Ulam$ הבא: מדיד ממשי בעל מידה ללא אטומים הוא $\geq 2^{\aleph_0}$.

2. נניח כי κ הוא גבול של סדרה עולה ורציפה של מונים $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$. נניח בנוסף כי לכל $\lambda < \kappa$ מתקיים $\lambda^{\aleph_1} < \kappa$. תהי $F \subseteq \prod_{\alpha<\omega_1} \kappa_\alpha^+$ משפחה של פונקציות שונות על סל"ח.
הוכיחו כי אז $|F| \leq \kappa^+$.

(זו הטענה האחרונה בהוכחת משפט $Silver$ אין צורך להוכיח את שאר הטענות.)

3. יהיה U על מסנן נורמלי על κ.
הראו כי
$\{\alpha < \kappa \mid$ אי נשיג חזק $\alpha\ \} \in U$.

4. הראו כי קבוצת המונים החריגים מתחת לאי נשיג חלש היא שבת.

5. נגדיר משחק לשני שחקנים באופן הבא:
כל שחקן לפי תורו בוחר סודר בן מניה. הסודר הנבחר אמור להיות גדול מכל הסודרים שנבחרו במהלכים הקודמים ע"י שני השחקנים.
אורך המשחק הוא ω_1. השחקן הראשון משחק בשלבים זוגיים וזה כולל כל השלבים הגבוליים. השחקן הראשון מנצח אם ורק אם קבוצת הסודרים שבחר מכילה סל"ח אחרת השני מנצח. מצאו אסטרטגיה ניצחון לאחד השחקנים.

6. הוכיחו כי $1 \Longleftarrow 2 \Longleftarrow 3$

(1) לכל קבוצה M ויחס $P \subseteq M \times M$ עם התכונה שלכל $x \in M$ קיים $y \in M$ כך ש־ $(x,y) \in P$.
קיימת סדרה $\langle x_n \mid n < \omega \rangle$ כך שלכל $n < \omega$ מתקיים $(x_n, x_{n+1}) \in P$.

(2) לכל משפחה בת מניה של קבוצות לא ריקות קיימת פונקצית בחירה.

(3) איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה.

בהצלחה!

AAAC-42