

## הפקולטה למדעים מדויקים

### בחינה בחישוב נומרי

0366-2008-01

מרצה: פרופ. ניר סוכן

מועד ב

סמסטר ב, תש"ע

5.9.2010

משך הבחינה 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר. ניתן להיעזר במחשב כיס.

בבחינה 5 שאלות. עליכם לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב 25 נקודות.

יש לרשום על טופס המבחן ועל דף הנוסחאות את מספר התלמיד (מספר תעודת הזהות) ולמסור אותו למשגיחות בסוף הבחינה . אין לרשום את שם התלמיד על טופס המבחן!

מספר התלמיד : \_\_\_\_\_

בהצלחה!

1	
2	
3	
4	
5	
סה"כ	

19-1111

תאריך: \_\_\_\_\_

חתימת הבודק: \_\_\_\_\_

## שאלה 1

א. (5 נק') נתונות הנקודות  $(x, f(x))$  הבאות:  $(1, 10)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(3, 20)$ .

ידוע ש  $|f^{(3)}| < 5$ ,  $|f^{(4)}| < 4$ ,  $|f^{(5)}| < 3$ .

נסמן את מעלתו המינימלית של פולינום אינטרפולציה עבור נקודות אלה ב-  $n$ .

מהו  $n$ ? מהי שגיאת האינטרפולציה המרבית בקטע  $(1, 3)$ ?

ב. (10 נק') לשלש הנקודות לעיל נוספו הנקודות  $(5, -10)$ ,  $(4, 25)$ ,

נסמן את מעלתו המינימלית של פולינום אינטרפולציה עבור כל הנקודות ב-  $m$ .

מהו  $m$ ? מהי שגיאת האינטרפולציה המרבית בקטע  $(1, 5)$ ?

ג. (10 נק') יהיו  $l_i(x)$  פולינומי לגרנז' על חמשת הנקודות מסעיפים א ו-ב.

מהי מעלת הפולינום

$$p(x) = 7l_1(x) + 9l_2(x) + 11l_3(x) + 13l_4(x) + 15l_5(x)$$

## שאלה 2

נתונים ערכי הפונקציה  $f(x)$  בנקודות:  $x_0 - \frac{h}{4}$ ,  $x_0$ ,  $x_0 + \frac{3h}{4}$ .

נסמן את המקסימום של הערך המוחלט של הפונקציה בקטע ב  $M$ .

א. (5 נק') מצאו נוסחת גזירה נומרית עבור  $f'(x_0)$ .

ב. (10 נק') מצאו את החסם המיטבי לשגיאת הנגזרת הנומרית עבור  $f'(x_0)$ .

ג. (10 נק') אם נתון כי שגיאת המחשב היא  $10^{-15}$ , מה צריך להיות גודלו של  $h$  כדי שסך

הכל השגיאה (שגיאת מחשב + שגיאת הנוסחה) תהיה מינימלית.

### שאלה 3

נקרב את הפונקציה  $f(x) = x^3$  בקטע  $(-1, 1)$

א. (8 נק') על ידי פולינום האינטרפולציה בנקודות  $-1, 0, 1$ . מהו הפולינום? מהי הטעות המקסימלית?

ב. (10 נק') על ידי פולינום ממעלה שנייה לפי קירוב הריבועים הפחותים וביחס למכפלה הסקלרית

$$\langle g, f \rangle = \int_{-1}^1 g(x) f(x) dx$$

ג. (7 נק') מהי הטעות המקסימלית בחישוב ב' איזה קירוב עדיף?

### שאלה 4

נתון כלל הטרפז המתוקן  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \frac{f'(a)-f'(b)}{12}(b-a)^2$

א. (5 נק') מה הסדר השגיאה בכלל הטרפז המתוקן?

עבור כלל הטרפז המורכב נסמן  $T_N = h \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(a)+f(b)}{2}$

ב. (10 נק') הוכח את כלל הטרפז המתוקן המורכב

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_N + \frac{f'(a)-f'(b)}{12} h^2 + O(h^4)$$

ג. (10 נק') בנה נוסחת אינטגרציה מסדר 4 מהצורה  $\int_a^b f(x) dx \approx \alpha T_N + \beta T_{5N} + O(h^4)$

מהם אלפא ובתא ?

### שאלה 5

$$(*) \quad \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$$

נתונה המערכת הליניארית

א. (5 נק') רשום את איטרציות גאוס-זיידל עבור המערכת.

ב. (10 נק') מהו תחום הערכים של  $q$  ושל  $p$  בו האיטרציות מתכנסות.

ג. (5 נק') נגדיר איטרציות מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1/2 + w & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} w & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוכח כי אם האיטרציות מתכנסות, אז הן מתכנסות לפתרון של המערכת הליניארית (\*) עם  $p = -1/2$  ועם  $q = 1$ .

ד. (5 נק') מצא עבור האיטרציות של סעיף ג  $1 \leq w \leq 2$  אופטימלי עבורו השגיאה

$$\frac{\|x^{(k)} - \bar{x}\|_1}{\|x^{(0)} - \bar{x}\|_1}$$

תקטן במהירות הגבוהה ביותר.