14.09.09

בחינה בתורת הקבוצות מועד ב' תשס"ט.

המורה: פרופסור יורם הירשפלד

משך הבחינה **שעתיים וחצי. לא תינתן הארכה. ענה על 4 מ 6 השאלות.**

מותר להיעזר בארבעה דפי סיכום שנכתבו בכתב יד.

הקדש זמן בתחילת הבחינה לקרא ולהבין את השאלות, ואם צריך, בקש הבהרה בשעה הראשונה של המבחן. אין צורך לענות לפי הסדר, ואין צורך לענות על חלקי שאלה שונים ברציפות, אבל רצוי לציין אם צפוי דיון נוסף בשאלה בהמשך. **בהצלחה!**

1. תזכורת לסימונים בשאלה: $\subset$ היא הכלה חזקה ו $A-D$ הוא קבוצת ההפרש המסומנת גם ב $A\setminus D$. בכל אחד מהסעיפים תן דוגמאות ל 3 קבוצות A,B,C המקיימות את הקשר המתואר בסעיף:

א. $A-(B\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$ ב. $A-(B\cap C)=A\cap(B\cup C)$

ג. $A-(B\cap C)\supset A\cap(B\cup C)$

אין צורך להוכיח דבר. רשמו בכל סעיף מי הן שלוש הקבוצות A,B,C ומי הן הקבוצות $A-(B\cap C)$ ו $A\cap(B\cup C)$ (יתכן שדיאגרמת Ven תמחיש לכם איזה קבוצות כדאי לבחור).

2. I היא פונקצית הזהות המקיימת $\forall x\ I(x)=x$

א. הביאו דוגמה לזוג פונקציות f ו g שאינן הפיכות אבל $g\circ f=I$

ב. האם יתכן שאחת מהפונקציות f או g היא הפיכה והאחרת לא? מדוע?

3. על קבוצת המספרים הטבעיים N מגדירים יחס: $a\equiv b$ אם a ו b מתחלקים בדיוק באותם המספרים הראשוניים.

א. (5 נקודות) הראה שזה יחס שקילות.

ב. על קבוצת המנה מבקשים להגדיר חיבור וכפל על סמך החיבור והכפל במספרים הממשיים. כלומר:

$$[a]+[b]=[a+b] \qquad [a]\cdot[b]=[a\cdot b]$$

AAAC-28

לכל אחת משתי הפעולות הוכח שההגדרה טובה, או הבא דוגמה המראה שההגדרה תלויה במייצגים (20 נקודות).

4. R היא קבוצת המספרים הממשיים. מצא פונקציות חד חד ערכיות המוכיחות כי:

א. כל הקטעים הפתוחים שווי עוצמה: לכל $a<b$ $|(0,1)|=|(a,b)|$

ב. הקטעים הפתוחים שווי עוצמה עם הישר כולו: $|(0,1)|=|R|$

ג. $|P(R)|=|R\to\{0,1\}|$

נא לתאר את הפונקציות במפורש כך שבהינתן עצם בתחום הפונקציה יהיה ברור מי בן זוגו. אין צורך בהוכחה שהפונקציה באמת חד חד ערכית או שהיא הפיכה.

5. R היא קבוצת המספרים הממשיים. הוכח שמספר הקבוצות הסופיות או בנות מנייה ב $P(R)$ קטן ממספר הקבוצות שאינן בנות מנייה.

(אפשרות: הראה כי $|N\to R|=$ א, ומכאן שמספר הקבוצות שהן בנות מנייה לכל היותר הוא א. הסבר מדוע לא יתכן שמספר הקבוצות שאינן בנות מנייה גם הוא א).

6. א. יהי $R\subseteq A\times A$. הגדר: "R הוא יחס סדר (לאו דווקא סדר שלם)" על A.
(הגדר במפורש את המושגים המופיעים בהגדרתך, כמו "טרנזיטיבי") (5 נקודות)

ב. תהי A קבוצה ותהי M קבוצה של יחסים על A. יהי $\tilde{R}=\bigcup_{R\in M} R$.

הוכח שאם כל $R\in M$ הוא יחס סדר על A הרי $\tilde{R}$ גם הוא יחס סדר על A.