

0366-3362

25 בפברואר 2011

סמסטר א' מועד ב' תש"ן

**בחינה במבוא לתופעות לא לינאריות**  
**פרופ' פיליפ רוזנאו**

- זמן הבחינה 180 דקות. אין להשתמש בשום חומר עזר.
- יש לפתור 3 מתוך 4 השאלות הנתונות. **בהצלחה!**

**שאלה 1 (40נק.)**

$$(1) \quad u_1 + (u^m)_x = (u^k)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad \begin{matrix} m > 1 \\ k > 1 \end{matrix} \quad \text{נתונה משוואת הסעה-דיפוסיה (1)}$$

א. למצוא את קשרי הדמיות ואת משתני הדמיות בתלות ב  $(k, m)$ . בפרט יש למצוא את המקרים בהם משתנה הסימטריה ואת משתני הדמיות המתאימים.

ב.

$$(2) \quad m = 3, k = 2 \quad \text{נתונה משי' (1) וכן:}$$

$$(3) \quad = Q_0 \delta(x) \quad u(x, t = 0) \quad 0 \leq Q_0 \leq \infty \quad \text{וכן תנאי ההתחלה} \quad X \in \mathbb{R}^1$$

למצוא את תגובת המערכת לתנאי התחלה (3). הערה: מבוקש פתרון מפורש!

(רמז: שני הפתרונות למשוואה  $y'' + xy = 0$  נתונים ע"י פונקציות Airy  $A_1(X)$  ו  $B_1(X)$ ).

ג. נתונה משי' (1) ותנאים (2), כמו כן נתון כי  $u, u_x \downarrow 0$

$$(4) \quad u \rightarrow u_L \geq 0 \quad x \rightarrow -\infty \quad |u_x| \downarrow 0 \quad \text{וכן} \quad x \rightarrow +\infty$$

למצוא את תגובת המערכת (1), (2) ותנאים (4). הערה: מבוקש פתרון מפורש!

**שאלה 2 (32 נק.)**

$$(1) \quad \gamma \geq 0, \quad u_t + uu_x + \gamma u'' = 0 \quad \text{נתונה משוואת הסעה-בליעה}$$

$$(2) \quad u(x, t = 0) = f(x) \quad \text{וכן תנאי התחלה}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1-x^2)^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

א (6 נקודות)  $\gamma = 0$ . למצוא את הזמן שבו נשבר פתרון חלק ל- (1)

ב. (10 נק.)  $w = 1$ . להראות שקיים  $\gamma$  כך שכאשר  $\gamma > \gamma$  הפתרון החלק לא יישבר.

ג. (14 נק.)  $w = 2$ . להראות ששום בחירה של  $\infty > \gamma > 0$  אינה יכולה למנוע את שבירת

הפתרון לבעיה (1) ו-(2) בזמן סופי.

BBBE-M

### שאלה 3 (36 נק.)

נתונה המשוואה  $u_{xt} = \sin u$  לכל  $x, t$  (1)

וצמד הטרנספורמציות  $\frac{1}{2}(u+v)_t = \frac{1}{a} \sin \frac{1}{2}(u-v)$  וכן  $\frac{1}{2}(u-v)_x = a \sin \frac{1}{2}(u+v)$  (2,3) כאשר  $a$  פרמטר ממשי.

- להראות כי הצמד (2,3) מהווה התמרת אוטו-בקלונד למשוואה (1).
- היעזרו בפתרון הטריגונומי של (1) כדי למצוא פתרון אחר של (1). מה הוא מתאר?
- יהי  $u_i$  פתרון כלשהו של (1) המתקבל בעזרת נוסחאות (2,3) והמתאים לבחירה  $a = a_i$ .

$$W = 4 \tan^{-1} \left[ \left( \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) \tan \left\{ \frac{1}{4} (u_1 - u_2) \right\} \right]$$

המבטאת יצירת פתרון שלישי  $W$  מתוך שניים אלה.

$$\text{הערה: } \sin b - \sin c = 2 \cos \frac{1}{2}(b+c) \sin \frac{1}{2}(b-c)$$

### שאלה 4 (32 נק.)

נתונה המשוואה  $u_t + 6uu_x + u_{xx} = 0$  על כל הישר.

- העזר במיפוי  $u = 2(\ln f)_{xx}$  כדי לפתח נוסחה לסוליטון אחד ולאינטראקציה של שני סוליטונים.

- כתוב במפורש את הנוסחה עבור מהירות סוליטונים 2 ו 3 בהתאמה, ואת התיאור האסימפטוטי של האינטראקציה עבור זמן גדול.

בהצלחה!!