

HHH-30

## חשבון אינפניטיסימלי 2

סמסטר ב' תש"ע

מועד א', 6 ביולי 2010

מרצה: ד"ר יואל שקולניצקי  
מתרגלים: ד"ר לאוניד קגן, ד"ר אלעד פארן.

### הוראות:

1. משך הבחינה 3 שעות.
2. יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
3. אין לפצל בין תת-שאלות.
4. השימוש במחשבון לא-גרפי מותר. השימוש בכל מחשבון אחר לרבות laptop, iphone, smartphone, ... - אסור!
5. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר.
6. רשמו על מחברת הבחינה את מספרי השאלות שברצונכם שייבדקו. במקרה של ספק, ייבדקו 4 השאלות הראשונות במחברת.
7. במקרים בהם נדרש נימוק, תשובה לא מנומקת לא תזכה בנקודות.

בהצלחה!

## שאלה 1

1. (12.5 נק') חשבו את האינטגרל  $\iint_S z \, dx \, dy$  כאשר  $S$  הוא הצד החיצוני של האליפסואיד  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
2. (12.5 נק') הפונקציה הסתומה  $z$  נתונה ע"י  $z^3 - 2xz + y = 0$ , ומקבלת את הערך  $z = 1$  עבור  $x = 1, y = 1$ . מצאו את פיתוח טיילור של  $z$  מסביב לנקודה  $x = 1, y = 1$  עד סדר שני (כולל).

## שאלה 2

1. (12.5 נק') חשבו את האינטגרל

$$\int_{\Gamma} \frac{x \, dx + y \, dy}{x^2 + y^2}$$

כאשר

$$\Gamma = \left\{ (x, y) : |x| + |y| = \frac{1}{10} \right\}.$$

2. (12.5 נק') חשבו את הנפח הכלוא בין הגליל  $x^2 + y^2 = 2ay$  והכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  (כלומר, חשבו את הנפח המשותף לגליל ולכדור).

## שאלה 3

1. (12.5 נק') האם קיים הגבול

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^3 + y^3}.$$

אם כן מהו? נמקו תשובתכם.

2. (12.5 נק') חשבו את הנפח של התחום  $V$  כאשר

$$V = \left\{ \left( \frac{x}{2-z} \right)^2 + \left( \frac{y}{2+z} \right)^2 \leq 4, -2 < z < 2 \right\}.$$

## שאלה 4

1. (6.5 נק') מצאו את נקודות וערכי הקיצון של הפונקציה  $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  בקבוצה  $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$  תחת האילוץ  $x + y + z = 3$ .
- 4 נק') לגבי כל נקודה ציינו האם היא נקודת מינימום/מקסימום/אחר. נמקו תשובתכם.
- 2 נק') האם זהו קיצון מוחלט? נמקו.
2. (12.5 נק') חשבו את אורך הקשת של העקום  $y^2 = x^3$  מהראשית לנקודה  $x = 4$ .

## שאלה 5

(25 נק') מהן הנקודות על האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

שבהן המשולש הנוצר ע"י החיתוך של המשיק לאליפסה עם הצירים הוא בעל שטח מינימלי?

בהצלחה!

## דף נוסחאות

### זהויות טריגונומטריות

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad .1$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad .2$$

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta \quad .3$$

### אינטגרלים

$$(n \neq -1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad .1$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad .2$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad .3$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + c \quad .4$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + c \quad .5$$

1057-1059

101

מחברת מס' \_\_\_\_\_  
מתוך \_\_\_\_\_ מחברות

אוניברסיטת תל-אביב  TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)  
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

הפקולטה למדעים מדויקים  
ע"ש ריימונד וברלי סאקלר

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו  
ולמעשה לדין משמעת.

תאריך הבחינה: 10/7/10  
שם הקורס: 2  
שם המורה: ד"ר יואל שניאורסון

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המסגרות ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.
2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק טלפונים ניידים או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחוק מסקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמסגרת.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמסגרת. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המסגרת.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יחזיק רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות מסועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למסגרת את המחברת ואת השאלון, ויקבל מסגרת את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב כלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן בסועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן יסולאו על כריכת המחברת בסקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המסגרת את התעודה המזהה.
11. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.



לשימוש המורה הבוחן:

הציון: \_\_\_\_\_  
המחברת נבדקה ביום: \_\_\_\_\_  
חתימת המורה: \_\_\_\_\_

3011917

בהצלחה.

$$x = r \cos \theta (2-z)$$

$$y = r \sin \theta (2+z)$$

~~Handwritten scribble~~

~~Handwritten scribble~~

~~Handwritten scribble~~

נתון  $I = \iint_S z \, dx \, dy$  כאשר  $S$  היא המשטח  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  הנמצא מעל המישור  $xy$ .

$$I = \iint_S z \, dx \, dy$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

המשטח  $S$  הוא חצי כדור בעל רדיוס 1.

$$S(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, b \sin \theta \sin \phi, c \cos \theta)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$I = \iint_S f(S(\theta, \phi)) \cdot \|S_\theta \times S_\phi\| \, d\theta \, d\phi$$

$$f(S(\theta, \phi)) = c \cdot \cos \theta$$

$$S_\theta = (-a \sin \theta \sin \phi, b \cos \theta \sin \phi, 0)$$

$$S_\phi = (a \cos \theta \cos \phi, b \sin \theta \cos \phi, -c \sin \theta)$$

$$S_\theta \times S_\phi = e_1 (-bc \cos \theta \sin^2 \phi) - e_2 (ac \sin \theta \sin^2 \phi) +$$

$$+ e_3 (-ab \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - abc \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi)$$

$$\Rightarrow \|S_\theta \times S_\phi\| = \sqrt{c^2 b^2 \cos^2 \theta \sin^4 \phi + a^2 c^2 \sin^2 \theta \sin^4 \phi +$$

$$+ a^2 b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi} = \sin^2 \theta$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

המשטח  $S$  הוא חצי כדור בעל רדיוס 1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\Rightarrow z^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow z = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$x = a \cos \theta \sin \phi, y = b \sin \theta \sin \phi$$

$$z = c \cos \phi \Rightarrow S(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, b \sin \theta \sin \phi, c \cos \phi)$$

$$S_\theta \times S_\phi : \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a \sin \theta \sin \phi & b \cos \theta \sin \phi & 0 \\ a \cos \theta \cos \phi & b \sin \theta \cos \phi & -c \sin \phi \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 (-b \cdot c \cdot \cos \theta \sin^2 \phi) - e_2 (a \cdot c \cdot \sin \theta \sin^2 \phi) +$$

$$+ e_3 (-a b \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - a b \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi) \quad \downarrow \text{no}$$

$$= (b \cdot c \cdot \cos \theta \sin^2 \phi, a \cdot c \cdot \sin \theta \sin^2 \phi, a b \sin \phi \cos \phi)$$

$$\|S_\theta \times S_\phi\| = \sqrt{\cancel{b^2 c^2 \sin^4 \phi} + \cancel{a^2 c^2 \sin^4 \phi} + a^2 b^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi}$$

$$f(x, y, z) = z = c^2 \cos^2 \phi$$

אף כי זהו  
גרעור 13

II לב קווי קרניים (X) (2)

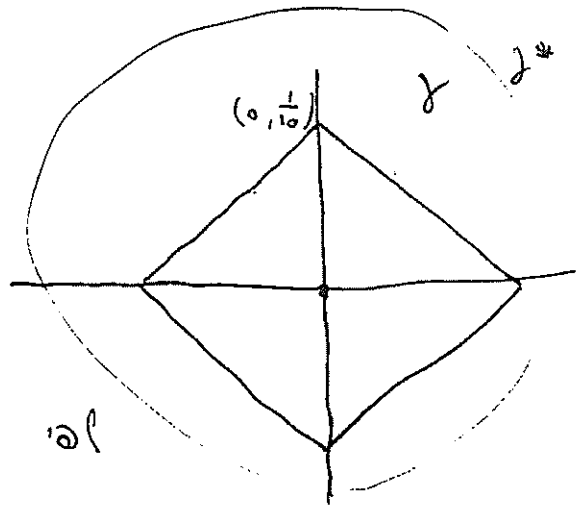
$$I = \int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$$

$$\gamma = \{ (x, y) : |x| + |y| = \frac{1}{10} \}$$

$$P = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$Q_x = \frac{-y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = P_y$$

השדה הוא פוטנציאלי -  $(0,0)$



לפי משפט גרין מוכלל (קראו) כל כוון מסלול

סגור סביב  $(0,0)$  האנלרם של השדה הוא

בשם מלואה גרואלה (בגוף ו-  $Q_x = P_y$ ) ולכן

פסול (תשק זאת האנלרם של השדה היתר)  $x^2 + y^2 = 1$

$$\gamma^*(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma^*} F(t) \cdot \gamma'^*(t) dt = \int_0^{2\pi} dt \left( \frac{\cos t}{1}, \frac{\sin t}{1} \right) (-\sin t, \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin t \cos t + \sin t \cos t dt = 0 \end{aligned}$$



(1)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$   
 Degree of  
 the curve  
 is 2

$(x \mid 1 \mid y)$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\Rightarrow z(r, \theta) = \pm \sqrt{1-r^2}$

The value of  $z$  is  
 $z > 0$  and  $z < 0$

$S(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1-r^2})$

$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a \cos \theta & b \sin \theta & -r \\ -a \sin \theta & b \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = e_1 \left( \frac{r^2 b \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}} \right) + e_2 \left( \frac{r^2 a \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}} \right) + e_3 (abr \cos^2 \theta + abr \sin^2 \theta)$   
 $= \left( \frac{r^2 b \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2 a \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}, abr \right)$

$\|S_r \times S_\theta\| = \sqrt{\frac{r^4 b^2 \cos^2 \theta + r^4 a^2 \sin^2 \theta + a^2 b^2 r (1-r^2)}{1-r^2}}$

$\Rightarrow \frac{I}{2} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z(\theta, r) \cdot \|S_r \times S_\theta\|}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = \iint$

The value of  $x$  and  $y$  is  
 the same as the value of  $x$  and  $y$

$\iint \sqrt{1-r^2} \cdot dx(\theta, r) \cdot dy(\theta, r) =$

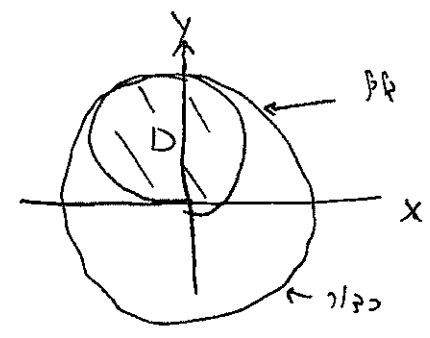
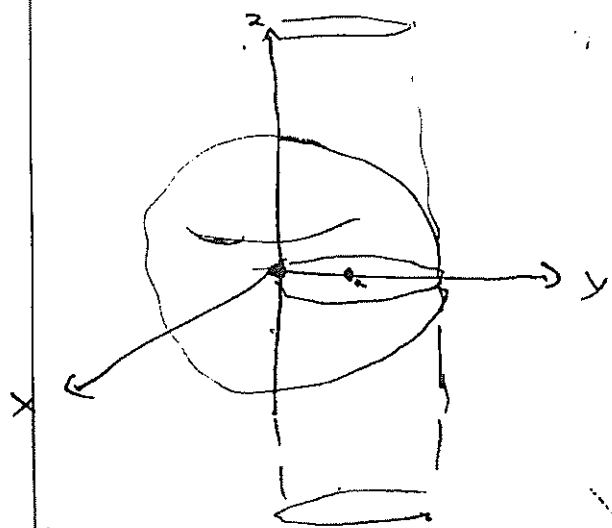
2/2

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \quad \text{כאשר}$$

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

לפיכך

$$x + (y-a)^2 = a^2$$



במקור  $xy$  - מישור  $z$  - מישור  $xy$  - מישור  $xy$

המשטח  $z = \pm \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$

$$z = \pm \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

$$z = \pm \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

משטח זה

הוא סימטרי

$$\frac{1}{2} I = \iint_D dx dy \int_0^{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dz = \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

המשטח  $z = \pm \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$  הוא סימטרי

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta + a$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$   
 $0 \leq r \leq a$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$J = r$$

$$z(\theta, r) = \sqrt{4a^2 - (r \cos \theta + a)^2 - (r \sin \theta)^2} = \sqrt{4a^2 - r^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \cdot \sqrt{4a^2 - r^2} dr = \int_0^{2\pi} d\theta \left[ -\frac{(4a^2 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta (4a^2 - a^2)^{3/2} - (4a^2)^{3/2} = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta (3a^2)^{3/2} - 4a^3 \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta (8 - \sqrt{27}) \Rightarrow I = \frac{2}{3} \cdot a^3 (8 - \sqrt{27}) \end{aligned}$$



שאלה 4 א) זכור כי וסדרו תיבון של  $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

בהנחה  $x > 0, y > 0, z > 0$  תחת האילוץ  $x+y+z=3$

נסמן האילוץ  $g = 0 = x+y+z-3$ . נבדוק, ערכי תיבון באזור

בגבולות האזור, ונראה שהם גדולים מהערך.

$$L(x,y,z) = f + \lambda g = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \lambda(x+y+z-3)$$

$$\Rightarrow \nabla L = 0 \quad \nabla L = \left( -\frac{1}{x^2} + \lambda, -\frac{1}{y^2} + \lambda, -\frac{1}{z^2} + \lambda \right)$$

$$-\frac{1}{x^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{y^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{z^2}$$

$$x+y+z=3 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$$

$$x^2 = y^2 = z^2$$

$$x = \pm y = \pm z$$

$$3x = 3$$

$$\Rightarrow x = y = z$$

$$\boxed{x = 1 = y = z}$$

ערכיו זה נה אחר תשובה.

~~$$f = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$~~

~~בהנחה  $x, y, z > 0$  בדרך כלל~~

~~בגבולות האזור, ונראה שהם גדולים מהערך.~~

~~זכור כי וסדרו תיבון של  $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$~~

זוהי נה מניחה!

נבחן את  $L^2$  בנק'  $(1,1,1)$

$$\partial L = L_{xx}(x)^2 + L_{yy}(y)^2 + L_{zz}(z)^2 + 2L_{xy}xy + 2L_{xz}xz + 2L_{yz}yz$$

אבל ברור שכל הנגזרות הכוללות (למשל)  $L_{xy}$

$$\text{שאינם } 0, \text{ ואכן } L = L_{xx}(x)^2 + L_{yy}(y)^2 + L_{zz}(z)^2$$

ואכן זו אכן נק' מינימלית. ✓

זו גם נק' מינימלית מוחלטת שכן כל קואסינרציה נאזרת

של  $(x, y, z)$  נותנת ערך ~~גבוה~~ יותר וזהו גמר המילוי.

אם לא נאזרת גורמה  
(2)

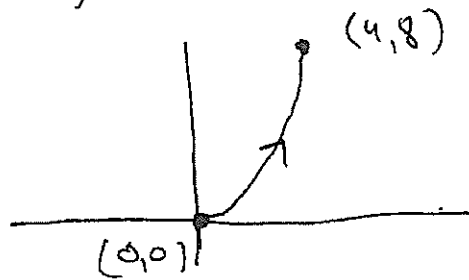
~~התאם את המידע הבא.~~

2/4

$$y = x^3$$

על העקום

נבחר נקודה אחרת



מחשבים את  $x=4$

נמצא פרמטריזציה אפשרית.

$$\gamma(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$$

$$\Leftrightarrow y = t^{\frac{3}{2}}, x = t$$

באמצעות  $t$  מונק נמצא את המרחק.

$$\text{המרחק} = \int_{\gamma} \|\gamma'(t)\| dt = I$$

$$\gamma'(t) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{t})$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$$

$$\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} \cdot \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \left[ \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{8}{27} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{8}{27} \left[ \left(1 + 9\right)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$= \frac{8}{27} \left[ 10^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$



הגבלה של  $y$  על  $x$  (X) (3)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^3 + y^3}$$

ננסה להכניס  $y = xk$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = xk}} \frac{kx^2}{x^3(1+k^3)} = \frac{k}{1+k^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x(1+k^3)} = \infty$$

הגבלה של  $x$  על  $y$



~~הגבלה של  $y$  על  $x$~~

נמצא את נפח הליבה של המעגל

$$V = \left\{ \left( \frac{x}{2-z} \right)^2 + \left( \frac{y}{2+z} \right)^2 \leq 4 \quad -2 < z < 2 \right\}$$

נמצא את נפח הליבה של המעגל

$$I = \int_{-2}^2 dz \iint_{\text{מעגל}} dx dy = \int_{-2}^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-z^2) r dr$$

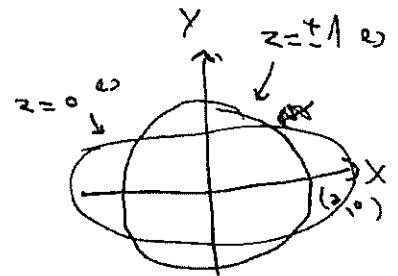
$$y = (2+z)r \sin \theta, x = (2-z)r \cos \theta, z = (4-z^2)r$$

$$= \int_{-2}^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 \right) =$$

$$= \int_{-2}^2 (4-z^2) dz \cdot 4\pi = 4\pi \left( 4z - \frac{z^3}{3} \Big|_{-2}^2 \right) =$$

$$4\pi \left[ 8 - \frac{8}{3} - \left( -8 + \frac{8}{3} \right) \right] =$$

$$= 4\pi \left( 16 - \frac{16}{3} \right) \checkmark$$





$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-2z}{3z^2-2x} = 2x \stackrel{\text{sub}}{=} \frac{2z}{3z^2-2}$  ✓  $F(x,y,z) = z^2 - 2x + y$   
 $F_z \neq 0 \quad F=0$

$z_y = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{-1}{3z^2-2x} \stackrel{\text{sub}}{=} \frac{-1}{3z^2-2}$  ✓

$T_{11} = z(1,1) + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left[ z_{xx}(\Delta x)^2 + z_{yy}(\Delta y)^2 + 2z_{xy} \Delta x \Delta y \right]$

$z_{xx} = \frac{+2z(\bar{x})}{(3z^2-2x)^2} = \frac{-4z}{(3z^2-2x)^2} \stackrel{\text{sub}}{=} \frac{-4z}{(3z^2-2)^2}$  ✓

$z_{yy} = 0, \quad z_{xy} = 0$

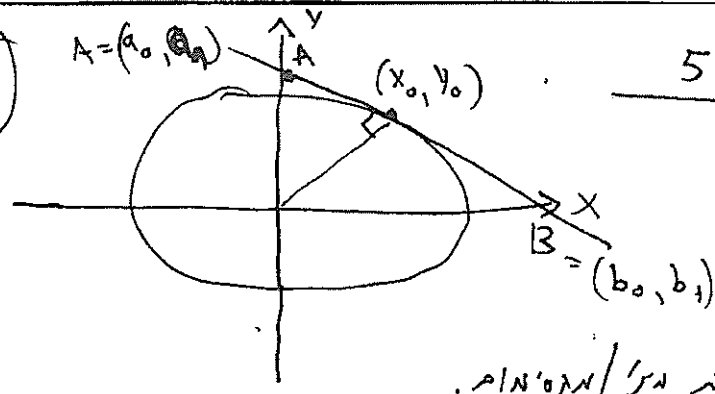
$\Rightarrow T_{11} = 1 + \frac{-2z}{3z^2-2} \Delta x + \frac{1}{3z^2-2} \Delta y + \frac{1}{2} \left( \frac{-4z}{(3z^2-2)^2} \right) (\Delta x)^2$   
 $z \approx (1,1) \approx 2$

✓ -7

הצגה גרפית  
15

$A = (a_0, a_1)$

5 הצגה



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

הנקודה הנמצאת על המעטפת

הנקודה הנמצאת על המעטפת היא הנקודה הנמצאת על המעטפת

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2 \Rightarrow y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

הנקודה הנמצאת על המעטפת

הנקודה הנמצאת על המעטפת

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

(הנקודה הנמצאת על המעטפת היא הנקודה הנמצאת על המעטפת)

הנקודה הנמצאת על המעטפת

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \left( -\frac{2x}{a^2} \right) = \frac{-b}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

הנקודה הנמצאת על המעטפת

$$y - y_0 = -\frac{b}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} (x - x_0)$$

הנקודה הנמצאת על המעטפת

$$A: \left( y_0 + \frac{x_0 b}{a^2}, 0 \right)$$

הנקודה הנמצאת על המעטפת

$$B (y=0): y_0 = \frac{y_0}{\frac{b}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}} + x_0$$

$$x = \frac{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot y_0 + b x_0}{b}$$

$$x b - a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} y_0 = b x_0$$

$$y = b \sin \theta, \quad x = a \cos \theta$$

...  $\sin \theta = \frac{y}{b}$  ...

$$\Rightarrow x = \frac{a^2 \sqrt{(1 - \cos^2 \theta)} y_0 + b x_0}{b} =$$

$$= \frac{a^2 \sin \theta y_0 + b x_0}{b} = x = \cos \theta$$

$$\Rightarrow a \sin \theta y_0 + b x_0 = b \cos \theta \Rightarrow x = \frac{a y_0 + b x_0}{b}$$

$$\Rightarrow x = x_0$$

$\theta$  is a constant value then

$$\text{slope} = \frac{-b}{a^2 \sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{-b}{a^2 \sin \theta}$$

$$\text{New line: } y = y_0 - \frac{b}{a^2 \sin \theta} x + \frac{b}{a^2 \sin \theta} x_0$$

$$\Rightarrow x = \left( \frac{y_0 a^2 \sin \theta + b x_0}{a^2 \sin \theta} \right) \frac{a \sin \theta}{b} =$$

$$x = \frac{y_0 a^2 \sin \theta}{b} + x_0 = x_0$$

$\theta = 0$

**לשימוש המרצה בלבד**

**טבלה לחישוב ציונים**

[illegible]