

סמסטר א', תשע"ב

בחינה בתורת הקבוצות

מרצה: מוטי גיטיק

מתרגל: אילון בילינסקי

משך הבחינה שלוש שעות.

יש לענות על 4 שאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

יש לנמק את טענותיכם ולצטט במדויק משפטים עליהם נסמכים בפתרון. השימוש בחומר-עזר אסור.

**ענו על 4 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות:**

1. הוכיחו משפט *Ulam* הבא: מונה מדיד הוא אי נשיג חזק.
2. נניח כי  $\kappa$  הוא גבול של סדרה עולה ורציפה של מונים  $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ . נניח בנוסף כי לכל  $\kappa < \lambda$  מתקיים  $\kappa < \lambda$ . תהי  $F \subseteq \prod_{\alpha < \omega_1} \kappa_\alpha$  משפחה של פונקציות שונות על סל"ח. הוכיחו כי אז  $|F| \leq \kappa$ .
3. הוכיחו כי כל תתקבוצה שבת של  $\aleph_1$  ניתן לפרק ל- $\aleph_1$  קבוצות שבת זרות.
4. נקרא לשתי פונקציות חלקיות סופיות  $f, g$  מ- $\omega_1$  ל-2 מתיישבות אם  $f \cup g$  היא פונקציה. יהי  $F$  אוסף של  $\aleph_1$  פונקציות סופיות חלקיות מ- $\aleph_1$  ל-2. הראה כי יש  $F \supseteq H$  בעוצמה  $\aleph_1$  כך שכל שתי פונקציות מ- $H$  הן מתיישבות.
5. יהי  $\kappa$  מונה סדיר ו- $A \supseteq \kappa$  בעלת עוצמה  $\kappa$ . הראה כי אז הקבוצה הבאה היא סל"ח:  

$$\{\alpha < \kappa \mid \bigcup (A \cap \alpha) = \alpha, otp(A \cap \alpha) = \alpha\}$$
6. יהי  $\kappa$  המונה הקטן ביותר כך ש- $2^\kappa > 2^{\aleph_1}$ . הראה כי אז  $\kappa$  הוא מונה סדיר.

**בהצלחה!**

AAAC-47