

ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשע"ב, מועד א'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה שלוש שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוני.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל ארבע מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות; פתרון מלא של כל חמש השאלות יזכה אותך ב- 100 נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלות מספריות.
- לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

שאלה 1:

יהיו m, n טבעיים המקיימים: $n \geq 2m+1$. הוכיחו:

$$\binom{n}{2m+1} = \sum_{k=m+1}^{n-m} \binom{k-1}{m} \binom{n-k}{m}$$

שאלה 2:

בוריס גלפנד רושם מספרים $1, \dots, 64$ על לוח שח 8×8 . הוכיחו כי קיימות שתי משבצות סמוכות (החולקות צלע) על הלוח אשר הפרש מספריהן הוא לפחות 5.

שאלה 3:

תלמידי הכיתה משתתפים ב-3 קבוצות ספורט כאשר כל זוג תלמידים משותף ביחד בקבוצה אחת לפחות. הוכיחו כי אחת מ-3 הקבוצות מכילה לפחות $2/3$ מתלמידי הכיתה.

שאלה 4:

מצאו בכמה האופנים יכול נוח להעמיס את תיבתו ב- n בעלי חיים מבין הגרירות, הסוסים, הפילים והקרנפים, כאשר הסוסים עולים רק בזוגות, הגרירות רק בשלושות, לא ניתן להעמיס יותר משני קרנפים, ולא ניתן להעמיס יותר מפיל אחד.

שאלה 5:

נגדיר $f(n)$ להיות המספר המרבי האפשרי של צלעות בגרף לא קשיר על n קדקודים. הוכיחו:

$$f(n) = \binom{n-1}{2}$$

(הראו גם את החסם העליון וגם את החסם התחתון על $f(n)$!)

בהצלחה!

CC-8