

מבחן במבוא לאלגברה 2

מרצה: פרופסור דוד גינזבורג

מועד א' סמסטר ב תש"ע 20.6.2010

יש לענות על כל השאלות.

1. הוכיחו את המשפט הבא: יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{C} , ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית. הוכיחו כי T ניתנת ללכסון אם ורק אם הפולינום המינימלי של T הוא מכפלה של פולינומים לינאריים שונים.

2. (א) הוכיחו כי כל מטריצה A המוגדרת מעל \mathbb{C} , ונמצאת בצורת ג'ורדן, היא סכום של שתי מטריצות הפיכות.

(ב) הוכיחו כי כל מטריצה A המוגדרת מעל \mathbb{C} היא סכום של שתי מטריצות הפיכות.

3. (א) תהי $A \neq 0$ מטריצה מסדר 2×2 עם מקדמים ב- \mathbb{C} . נניח כי A צמודה לעצמה, כלומר $(A = A^*)$. הוכיחו כי $A^2 \neq 0$.

(ב) הוכיחו כי לכל m טבעי, מתקיים $A^{2^m} \neq 0$.

(ג) הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $A^k \neq 0$.

4. (א) מצאו את כל צורת ג'ורדן האפשריות של העתקה $T : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$ המקיימת:

$$m_T(x) = x^3, \quad \dim \ker T = 3$$

(ב) מצאו את כל ערכי $a, b, c \in \mathbb{C}$ עבורם הפולינום המינימלי של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ & 2 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

הוא $(x-1)(x-2)$.

AAAS-29

63

מחברת מס' _____
 מתור _____ מחברות

אוניברסיטת תל-אביב  TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה סלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעין את ההוראות:

- הנך נדרש לשמור על סוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המסגרות ולנהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד וברלי סאקלר

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צמ"י להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משפטי.

- על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
- אין להחזיק סלפונים ניידים או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחוק מסקום מושבו.
- אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
- קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמסגרת.
- נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמסגרת. בעת ציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המסגרת.
- נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידי, לא יחזיק רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות מסועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למסגרת את המחברת ואת השאלון, ויקבל ממנו את התעודת המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחלים לעזוב בלי לכתוב את הבחינה יחשב כמי שנבחן בסועד זה וציונו יהיה "0".
- אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
- אין לתלוש דפים מהמחברת. סיוסה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
- יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל סיד המסגרת את התעודת המזהה.

תאריך הבחינה 20.06.10 21

שם הקורס מחזור א' - 2

שם המורה DR. ASHLEY



לשימוש המורה הבוחן:

הציון 94
 המחברת נבדקה ביום 5/7/10
 חתימת המורה _____

3020575

בהצלחה.

שאלה 1

נניח כי $T: V \rightarrow V$ (מעל \mathbb{C}) ניתנה אלסטרן ואם V הפעולה המיוננת. שיהי הפעולה של האופרטור ליניאריות של V .

הוכחה:

\Rightarrow

נניח כי הפעולה המיוננת של T מתפרק לאופרטורים ליניאריים של V . נגדיר $M_T(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n)$. אז $M_T(X)$ הפעולה של T ניתנה אלסטרן. נניח שהפעולה של T ניתנה אלסטרן.

נניח שהפעולה של T ניתנה אלסטרן (הפעולה המיוננת) מקיים $M_T(T) = 0$.
 $(1) \quad M_T(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I) = 0$

יהי $V_i \in V$ ונניח כי $V_i \neq 0$ ונקח

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I) V_i = 0$$

הפעולה של T ניתנה אלסטרן (הפעולה המיוננת) מקיים $V_i \neq 0$ ונקח

$$(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I) V_i = 0$$

$$\Rightarrow (T - \lambda_i I) V_i = 0 \Rightarrow T V_i = \lambda_i V_i$$

כלומר V_i ו"ל שיהיה $V_i \neq 0$ ונקח $V_i \neq 0$ ונקח $V_i \neq 0$.

$V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$ ונניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$.

נניח כי $1 \leq j \leq n$ ונניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$.

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

נניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$ ונניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$.

נניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$ ונניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$.

$$\dim V = n$$

נניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$ ונניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$.

נניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$ ונניח כי $V_j \in \ker(T - \lambda_j I)$.

(המשפט של רי)

עצת כי T ניתנת לריבון ונראה כי הפעמים (הפעמים) היא מכלול של ערכים אינפיניטים

שונים.

מכאן ש- T ניתנת לריבון נטוי שקיים בסיס של קטורים v_1, \dots, v_n כך שהערכים
העצמיים המתאימים: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) \quad \text{נדרש:}$$

על ידי ריבון מתקיים $m_T(x) | f(x)$, נבדוק כי, לפי טעם שלבס, (הטעם)
המיונה של T מתקן $f(T) = 0$ (הקיום) $f(T) = 0$, אם, בלוח, למכאן שלבס
מתקיים $m_T(x) | f(x)$ של ריבון. $m_T(x)$ מתכסה מוכיח משימות אינפיניטיות
שונים תמיד

$$f(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I)$$

~~Image f(T) = 0~~ $v_i \in V$ מקטורי העצמיים המתאימים
של λ_i

$$f(T)v_i = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I)v_i = (T - \lambda_i I) \dots (T - \lambda_n I)v_i$$

↓
קואטור

מכאן ש- v_i של λ_i מתקיים כי $Tv_i = \lambda_i v_i$ כלומר $(T - \lambda_i I)v_i = 0$

$$f(T) = 0 \quad \text{כל } (T - \lambda_i I)v_i = 0$$

מכאן ש- $f(T) = 0$ מתכסה $m_T(x)$ מתקן של $f(x)$, שלבס מכאן שלבס
פולגים שלבס מכלול של ערכים אינפיניטים שונים מתכסה של הפולגים
המתקנים שלבס (לחומר) שלבס יתקן שלבס $f(x)$.

אין הפניות T ניתנות לריבון נטוי כי הפעמים (הפעמים) שלבס מתכסה
מתכסה אינפיניטים שונים



$$(A-I) \cdot (A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & c \\ 0 & c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b+ac-b \\ 0 & 0 & c-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \leftarrow \text{נרצה שותקים}$$

נאמר נמחין כי שותקים, ולכן b .

זוהי $a=0$, נשאל, הנדוש שותקים, אם $a=0$.

מחננת $a=0$ נקרא $ac=0$ קשר, ולכן c .

לכן, הסקנו שנקרא שותקים, $a=0$ וכן b וכן $c-1$ (נאמר $a, b, c \in \mathbb{C}$)

(הפונקציה הנחשבת A היא $(x-1)(x-2)$)



(2) צייג אונז אז $A^k \neq 0$ איז א סדר k פאר A .

• עס איז K אזוי אז $C = A^{\frac{K}{2}}$ און $C^2 = A^{\frac{K}{2}} \cdot A^{\frac{K}{2}} = A^K$

$$C^* = \underbrace{A^* \cdot A^* \cdot \dots \cdot A^*}_{\frac{K}{2} \text{ פאלן}} = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\frac{K}{2} \text{ פאלן}} = C$$

$\leftarrow C$ איז א צייג פאר A .

אויסער דעם, נעמען $C^2 \neq 0$ און $A^* \neq 0$.

(אנאליזירן די עקסטרעם פאלן): $C_1 = A^{\frac{K}{2}} \rightarrow C^2 = A^{\frac{K}{2}} = C_1$

$C_2 = A^{\frac{K}{2}} \rightarrow C^2 = A^{\frac{K}{2} + \frac{K}{2}} = A^K = C_1$

• אים K איז א סדר. (אויסער דעם, נעמען $K=1$ אזוי אז $A \neq 0$ און A^* איז א סדר.)

2 - $A \neq 0$ און A^* איז א סדר.

~~$A \neq 0$~~ ~~$A^* \neq 0$~~ ~~$A \neq 0$~~ ~~$A^* \neq 0$~~

נעמען $A^{K-1} \neq 0$ (אויסער דעם, נעמען $A \neq 0$ און A^* איז א סדר.)

אויסער דעם, נעמען $A^{K-1} \neq 0$ און A^* איז א סדר.

נעמען $A^* V = 0$ און $V \neq 0$ אזוי אז $A^* V = 0$ און $V \neq 0$.

אויסער דעם, נעמען $A^* V = 0$ און $V \neq 0$ אזוי אז $A^* V = 0$ און $V \neq 0$.

($A \cdot A^* = A^* \cdot A = A^* A^* = A^* A$)

אך הלא מקרה פרטי.

(ב) נניח כי A מתהווה מ C על ידי טרנספורמציה ליניארית. (ב)

נניח כי A מתהווה מ C על ידי טרנספורמציה ליניארית. P היא מטריצה הפיכה. $J_A = P^{-1}AP$ כך ש-

~~אם A מתהווה מ C על ידי טרנספורמציה ליניארית~~

נניח כי J_A מתהווה מ J_C על ידי טרנספורמציה ליניארית. $J_A = B + C$

ההתהוות של A מ C נעשה באמצעות מטריצה P הפיכה. $J_A = P^{-1}AP$

כפי שהראינו את J_A נעשה על ידי טרנספורמציה ליניארית:

$$J_A = B + C = P^{-1}AP \rightarrow P(B + C)P^{-1} = A$$

$$\Rightarrow A = PBP^{-1} + PCP^{-1}$$

מכאן ש- A, B, C, P הן מטריצות $n \times n$ המהוות את A על ידי טרנספורמציה ליניארית.

נניח ש- R היא מטריצה הפיכה. $\Delta_A(x) = x^2 + 1$ הוא הפולינום המינימלי של A . אם $\Delta_A(x) = x^2 + 1$

התכנית הלימודית

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

התכנית הלימודית

טאג

$$0 = (A^2 u, u) = (Au, Au) \xrightarrow{u} Au = 0 \rightarrow A = 0$$

$$(A^2) = A^{2m} = (A^m)^2$$

$$A^m = S$$

$$S = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_m$$

$$A$$

$$2^{m/2}$$

$$A$$

Diagram illustrating the recursive construction of a Sierpinski triangle. The diagram shows a sequence of stages: a single point, a line segment, a triangle, and a more complex fractal structure. The construction involves repeatedly replacing a line segment with a path that goes around a central point, creating a fractal boundary. The diagram is labeled with 2^{m-1} and 2^m to indicate the number of segments at different stages.

$$B = A^{2^{m-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 2i & 4 & 5 \\ 1 & 3i & i \\ 2 & 3 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 & 2 \\ 4 & 3i & 3 \\ 5 & 6 & i \end{pmatrix}$$

$$0 = (B^2 v, v) = (Bv, Bv) \quad \left(\begin{array}{l} B=0 \quad \Leftarrow \quad Bv=0 \\ A \quad \quad \quad \Leftarrow \end{array} \right.$$

$$A \cdot A^k = A \cdot D$$

$$A = A^+$$

$$D = D^+$$

$$A = A^*$$

$$\Rightarrow A = \bar{A}$$

$$\sigma: (A_D, v, \mathcal{U}) \mapsto (A_v, D_r)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 3 & i & 5 \\ 2 & -i & i \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & i & -i \\ i & 5 & i \end{pmatrix}$$

1.25 v 256) $n = k - 1$ 102 m

$$y(k) \quad k=0$$

25. 11. 20

2. proj_B by $B^{-1} \cdot \text{inv}_N \circ A$ s.t. $A = A^*$ r/c

אנ' ממוכרין (יגן, אן אגן)

$$A = A^*$$

$$\Rightarrow AA^* = A^*A$$

→ איננו A
→ איננו A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b+ac-b \\ 0 & 0 & c-c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^* = \bar{A}^t = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = A^* \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{d} = d, \bar{a} = a \\ \bar{a} = d, \bar{d} = a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} \cdot a + b\bar{b} & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

אזכור: a, b, c, d אינן necessarily integers of A

$$A = A^*$$

$$A = A^*$$

(A, v, v)

$$(Av, v) = (\lambda v, v) = \lambda(v, v)$$

$$(Av, v) = (v, Av) = \bar{\lambda}$$

3
2,
?

$$B = A^{m-1}$$

$$B = A^2$$

$$B_1 = A^{2^{m-2}} \rightarrow B_1 = A^{2^{m-2}} \cdot A^{2^{m-2}} = A^{2^{m-1}} = A^{2^{m-1}} = B$$

אזכור: A

$$A = A^*$$

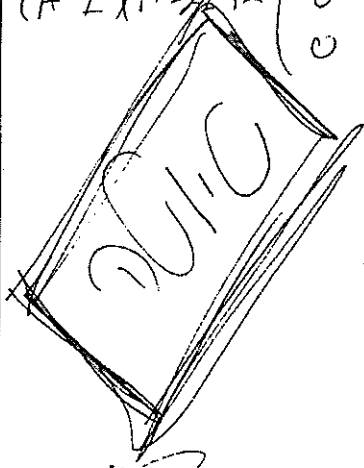
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

→ איננו A

חומר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8i \\ 0 & 2 & i+2 \\ 6 & i & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8i \\ 0 & 1 & i+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8i \\ 0 & 0 & i+2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



~~הערות: המטרה היא להוכיח את הטענה
הנכונה. המטרה היא להוכיח את הטענה
הנכונה. המטרה היא להוכיח את הטענה
הנכונה.~~

$$\text{rank} = n$$

$$A =$$

$$C \text{ פולינום ממונה ב-} A(x) = (x - \lambda_1)^{l_1} (x - \lambda_2)^{l_2} \dots (x - \lambda_n)^{l_n}$$

$$\begin{pmatrix} 3i & d & e \\ a & 2i & f \\ b & i & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3i & a & b \\ d & -2i & c \\ e & f & -i \end{pmatrix}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

$$A^{2^{m-1}} \cdot A^{2^{m-1}} \cdot A^{2^{m-1}} \cdot A^{2^{m-1}} = A^{2^m}$$

$$A = B + C$$

$$A = B + C$$

$$J_A =$$

$$B = A^{2^{m-1}}$$

$$B_C = A^{2^{m-1}}$$

לשימוש המרצה בלבד

טבלה לחישוב ציונים

[illegible]