

מבחן סוף סמסטר בחשבון אינפיניטסימלי I

המרצה פרופ' א. שצ'רבק

משך המבחן 3 שעות
יש לענות על 4 מתוך 6 שאלות. ערך כל שאלה 25 נקודות
רק תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה במלוא הנקודות
דף נוסחאות מצורף לתופס המבחן
אין להשתמש בחומר עזר נוסף, כולל מחשבון

בהצלחה!!

1. (א) האם הסדרה $a_1 = A > 1$, $a_{n+1} = A\sqrt{a_n}$ מתכנסת?
אם כן מצאו את גבולה.

(ב) חשבו $\int_0^e x \ln(e^2 + x^2) dx$

2. (א) כמה שורשים ממשיים יש למשוואה $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2 = \frac{1}{8}$?

כמה מהן חיוביים? האם יש שורש x_0 ש- $|x_0| > 1$?

(ב) חשבו $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$ (אם הוא קיים).

3. (א) עבור אילו ערכי b, a תהי פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(a + b \cos x) \sin x - x}{x^3}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

רציפה ב-0?

(ב) חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{5n-3}\right)^{3n-5}$

www-21

4. נתון כי פונקציה $f(x)$ רציפה לכל x וגם זוגית.
 (א) הוכיחו כי קיימת פונקציה הקדומה ל- $f(x)$ שהיא אי זוגית.
 האם כל פונקציה קדומה ל- $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית?

(ב) נניח בנוסף כי $f(0) = c$. חשבו $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{-x}^x f(t) dt \right)$.

5. (א) מצאו מספר רציונאלי שמקרב את $\frac{1}{\sqrt{e}}$ עם דיוק 0.01.

(ב) תהי פונקציה $f(x)$ חיובית, רציפה וגזירה לכל x .

הוכיחו: אם $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$, כאשר $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$,

אז קיים $\gamma \in (\alpha, \beta)$ כך ש- $2f(\gamma) = f'(\gamma) \sin 2\gamma$.

6. חקרו פונקציה $y = \frac{(x+3)^3}{(x-1)^2}$ לפי סעיפים הבאים: תחום הגדרה,

נקודות חיתוך עם צירים, אסימפטוטות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, קמירות, ונקודות פיתול. שרטטו סקיצת הגרף

בהצלחה!

15-6666

דף נוסחאות

חשבון אינפיניטסימלי I

טריגונומטריה

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; & \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}; & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}; \\ \tan \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}; & \tan^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}; & \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}; & \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}; \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]; & \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]; \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)];\end{aligned}$$

פולינום טיילור (מק-לורן) של $f(x)$ בנקודה a

$$T_n(f(x), a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

דוגמאות:

$$T_n(e^x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$T_n(\ln(1+x), 0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

$$T_{2k-1}(\sin x, 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} = T_{2k}(\sin x, 0)$$

$$T_{2k}(\cos x, 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = T_{2k+1}(\cos x, 0)$$

$$T_n((1+x)^\alpha, 0) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

(עבור $\alpha \neq 0, 1, 2, \dots, n, \alpha \in \mathbb{R}$)

נוסחת טיילור עם שארית בצורת לגרנז'

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

אינטגרלים

$$F' = f, \quad \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad \text{הצבה}$$

$$\int F(x)dG(x) = F(x)G(x) - \int G(x)dF(x) \quad \text{לפי חלקים}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

בהצלחה!!