

מבחן במבוא לתורת הקבוצות (0366.1105.01)

מחצית ראשונה של תשס"ח

מועד ב

המורה: משה ירדן

משך המבחן: 3 שעות

ענה על ארבע משש השאלות דלהלן. אין להשתמש במחברות או בספרים.

1. תהי $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ סדרה עולה של קבוצות כך ש $|A_n| < |A_{n+1}|$ לכל n טבעי. נסמן $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. השתמש בשיטת האלכסון השנייה של קנטור כדי להוכיח ש $|A^{\mathbb{N}}| > |A|$.

2. תהי X קבוצה. נסמן ב $P(X)$ את אסוף כל הקבוצות החלקיות של X .

(א) הוכח ש $|2^X| = |P(X)|$.

(ב) הוכח ש $|2^X| > |X|$.

3. נסמן ב P את קבוצת כל הסדרות (a_1, a_2, a_3, \dots) של מספרים טבעיים שעבורן $a_{n+1} - a_n$ הוא מספר ראשוני לכל n טבעי. הוכח ש $|P| = 2^{\aleph_0}$.

4. הוכח את למת נקדת השבֵּת: תהי X קבוצה ותהי $\varphi: P(X) \rightarrow P(X)$ העתקה המקימת $\varphi(B) = B$ כך ש $A, B \in P(X)$ לכל $A \subseteq B \implies \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$.

5. יהי R יחס סדר חלקי של קבוצה X .

(א) הוכח שקיים יחס סדר חלקי מרבי S של X (כלומר S אינו מוכל ממש בשום יחס סדר חלקי של X) המקיף את R .

(ב) הוכח ש S מסעיף (א) הוא יחס סדר מלא (= קוֹני) של X . (כלומר, לכל $x, y \in X$ מתקיים $(x, y) \in S$ או $((y, x) \in S$).

6. הוכח את משפט המכפלה: $aa = a$ לכל מונה אינסופי a .